

No d'ordre 176

Année 1983

THESE

PRESENTEE

A LA FACULTE DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES
DE L'UNIVERSITE DE FRANCHE-COMTE *Besançon*

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Rémi BRENDEL

EFFET ELECTROELASTIQUE
ET DIFFUSION DES IMPURETES
DANS LE QUARTZ

Soutenu le 20 octobre 1983 devant la commission d'examen

MM: GALATRY	Président
AUTHIER	Examineur
BESSION	Rapporteur
CONSTANT	Examineur
DIEULESAINT	Rapporteur
GAGNEPAIN	Rapporteur



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546621_0022

No d'ordre 176

Année 1983

THESE

PRESENTÉE

A LA FACULTE DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES
DE L'UNIVERSITE DE FRANCHE-COMTE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Rémi BRENDEL

EFFET ELECTROELASTIQUE ET DIFFUSION DES IMPURETES DANS LE QUARTZ

Soutenue le 20 octobre 1983 devant la commission d'examen

MM. GALATRY	Président
AUTHIER	Examineur
BESSON	Rapporteur
CONSTANT	Examineur
DIEULESAINT	Rapporteur
GAGNEPAIN	Rapporteur

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ BESANÇON**Président :** Monsieur le Professeur Jacques ROBERT**Présidents honoraires :** MM. THIEBAUT, LÉVÊQUE**FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES****DOYEN**M. le Professeur Jean BULABOIS
Physique Générale-optique**DOYENS HONORAIRES**MM. GLANGEAUD, JACQUEMAIN, CHATELET, THIÉBAUT,
BERNARD, GALATRY**ASSEESSEURS**M. le Professeur Bernard MILLET
Botanique
M. HEROLD Jean-Pierre, Maître-Assistant
Physiologie animale**PROFESSEURS HONORAIRES**MM. BENNETON, CHATELET, MESNAGE, PERROT,
PLUVINAGE, QUANTIN, REAL, THIRY, TRILLAT,
TRONCHET, UEBERSFELD**PROFESSEURS**

MM. ALBIGNAC Roland	: Biologie anim. et Ecologie	LAUDE Bernard	: Chimie organique
BANTEGNIE Robert	: Mathématiques	LESAINT Pierre	: Mathématiques I
BENILAN Philippe	: Mathématiques	LHOTE François	: Automatique
BERNARD Jean	: Chimie Physique	MANIA Jacky	: Géologie Structurale et appliquée
BIDAULT Michel	: Taxonomie expérimentale		
Mme BRIDE Michèle	: Zoologie Embryologie	MERIGOUX Henri	: Cristallographie et Synthèses minérales
BROQUET Paul	: Géologie		
BRUCKERT Sylvain	: Ecologie végétale	MIELLOU Jean-Claude	: Analyse numérique
BULABOIS Jean	: Physique Gle Optique	MILLET Bernard	: Botanique
CAPODANNO Pierre	: Mécanique théorique	MONTAGNER Hubert	: Psychophysiologie
CERUTTI Ernest	: Chimie appliquée	MOREELS Guy	: Astronomie
CHALEAT Raymond	: Mécanique appliquée	OLIVIER Marcel	: Electronique quantique
CHAMBAUDET Alain	: Chimie	OYTANA Claude	: Mécanique appliquée
CHARDON Jean-Claude	: Spectroscopie	PAGETTI Claude	: Corrosion et traitements de surface
CHAUVE Pierre	: Géologie minéralogie		
COUGNARD Jean	: Mathématiques	PARIZET Jean	: Mathématiques
DEVIN Claude	: Chmie 1er cycle	POTIER Robert	: Physique des solides
DOBREMEZ Jean-François	: Biologie	RANGHEARD Yves	: Géologie
DUBOUCHET Jacques	: Physiologie végétale	RIPPLINGER Jean	: Physiologie animale
GALATRY Louis	: Physique moléculaire	ROBERT Daniel	: Physique
GAUDEMER Yves	: Biochimie	ROBERT Guy	: Electrochimie
GIRARDET Claude	: Physique moléculaire	ROBERT Jacques	: Mathématiques I
GOMOT Lucien	: Zoologie-Embryologie	STRICKER Christophe	: Mathématiques
GOUARNE René	: Mathématiques	THEOBALD Jean-Gérard	: Spectroscopie hertzienne
GRAS Georges	: Mathématiques	THIEBAUT Jean	: Petrogr. minéralogie
GREMILLARD Jean	: Mathématiques	TREHEL Michel	: Informatique
JOLICARD Georges	: Physique moléculaire	VERNEAUX Jean	: Zoologie-Embryologie
KARCHE Jean-Paul	: Pétrographie Minéralogie	VIENTOT Jean-Charles	: Physique Gle Optique
LALLEMENT Gérard	: Mécanique appliquée	VIGOREUX Jean-Marie	: Physique
		WEIL Michel	: Mathématiques

Responsable des services administratifs: M. Jean-Marie RUNGE**Professeurs des Instituts Universitaires de Technologie dont les activités de Recherche sont rattachées à la Faculté des Sciences et Techniques de Besançon****I.U.T. de Besançon**MM. GENTYL Claude : Spécialité Chimie
ROUYER Bernard : Spécialité Mécanique**I.U.T. de Belfort**KAUFFMANN Jean-Marie : Spécialité Electrotechnique
MANDRET Gérard : Spécialité Electronique
PRENEL Jean-Pierre : Spécialité Physique
STAMON Georges : Spécialité Informatique
RONDOT Daniel : Spécialité Métallurgie**ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE MICROMÉCANIQUE ET MICROTECHNIQUE****DIRECTEUR**M. le Professeur Raymond CHALEAT
Mécanique Appliquée**DIRECTEUR HONORAIRE**

M. le Professeur MESNAGE

MM. ANDRE Pierre : Informatique Industrielle
AVRAMESCO André : Mathématiques
BESSON Raymond : Electronique
FAURE Alain : AutomatiqueHAUDEN Daniel : Microélectronique
Mme LOSCO Lucette : Mécanique
ROQUES-CARMES : Physico-Chimie des Matériaux**Responsable des services administratifs :** Madame Jocelyne HAUTON

A ma mère

Le travail présenté dans ce mémoire a été élaboré au Laboratoire de Physique et Métrologie des Oscillateurs du CNRS, j'exprime toute ma reconnaissance à son directeur M. GAGNEPAIN, directeur de recherche au CNRS, qui a dirigé mes recherches, m'a conseillé, corrigé et encouragé en permanence.

Une grande partie du dispositif expérimental a pu être réalisé grâce à l'aide financière apportée par la Direction des Recherches et Etudes Techniques à laquelle j'exprime toute ma gratitude.

Je remercie M. le Doyen GALATRY, directeur du Laboratoire de Physique Moléculaire, professeur à la Faculté des Sciences de Besançon, qui m'a fait l'honneur d'examiner ce travail et de présider le Jury de Thèse.

M. DIEULESAINT, directeur du Laboratoire d'Acoustoélectricité, professeur à l'Université Pierre et Marie Curie, a bien voulu s'intéresser à mes recherches et examiner mon travail, je lui en suis très reconnaissant.

Je sais gré à M. BESSON, directeur du Laboratoire de Chronométrie et de Piézoélectricité, professeur à l'ENSMM de Besançon, d'avoir accepté de faire partie du Jury malgré les nombreuses responsabilités dont il a la charge.

M. CONSTANT, directeur du Centre Hyperfréquence et Semiconducteurs, professeur à l'Université des Sciences et Techniques de Lille, m'a également fait l'honneur d'examiner ce travail et je lui exprime ici toute ma reconnaissance.

Je remercie également M. AUTHIER, directeur du Laboratoire de Minéralogie et Cristallographie, professeur à l'Université Pierre et Marie Curie, de l'intérêt qu'il a montré pour cette étude et d'avoir bien voulu faire partie du Jury.

Je sais gré aux chercheurs du L.P.M.O. des conseils qu'ils m'ont donnés et les discussions que nous avons eues ensemble, en particulier M. PLANAT, D. HAUDEN et surtout G. THEOBALD qui a bien voulu accepter de relire le manuscrit.

R. BOURQUIN du L.C.P. s'est depuis longtemps intéressé à mes recherches, son amitié et ses conseils m'ont été précieux et je lui en suis reconnaissant.

Je n'oublierai pas les ingénieurs et les techniciens du L.P.M.O. qui m'ont aidé dans la réalisation du dispositif expérimental : G. MARIANNEAU et J. GROSLAMBERT pour les dispositifs de mesure, R. PRETOT pour le contrôle des températures et la haute tension, C. MAGNIN pour la réalisation des parties mécaniques.

L'informatique tient une grande part dans ce travail et je tiens à remercier les ingénieurs et techniciens du Centre de Calcul de Besançon, en particulier G. DUPONT et M. LACROIX, ainsi que les chercheurs du Laboratoire de diélectrique de Dijon : G. ORMANCEY et J.-P. BARDET pour l'aide qu'ils m'ont apportée.

La présentation du mémoire est dû pour une grande part au travail de dactylographie réalisé avec compétence et gentillesse par C. HISLEUR à laquelle je témoigne toute ma gratitude.

Je remercie également B. DESMOULIN et R. GRAND pour les travaux de reproduction qu'ils ont réalisés.

SOMMAIRE

	pages
INTRODUCTION	1
Ch.1 – EQUATIONS GENERALES DE L'ELECTROELASTICITE	5
1. DEFINITIONS ET PROPRIETES DES MILIEUX CONTINUS	6
1.1. Description du milieu	6
1.2. Les différents types de représentation	6
1.3. Dérivation par rapport au temps	7
1.4. Jacobien d'une déformation	8
1.5. Propriétés par unité de volume et par unité de masse	9
2. LOIS DE CONSERVATION EXPRIMEES DANS L'ETAT DEFORME	10
2.1. Conservation de la masse	10
2.2. Conservation de la quantité de mouvement	10
2.3. Conservation du moment cinétique	11
2.4. Conservation de l'électricité	11
2.5. Equations de Maxwell	12
2.6. Conservation de l'énergie	12
3. FORMES LOCALES DES EQUATIONS DANS L'ETAT DEFORME	14
3.1. Equations de Maxwell	14
3.2. Tenseurs des contraintes	14
3.3. Formes locales des équations d'équilibre	15
3.4. Conditions aux limites	16
4. CONSEQUENCES DES PRINCIPES THERMODYNAMIQUES	18
4.1. Premier et second principes	18
4.2. Energie interne	18
4.3. Potentiel de Gibbs	18
Ch.2 – EQUATIONS GENERALES DANS L'ETAT NATUREL	21
5. EXPRESSION DE L'ENERGIE RAPPORTEE A L'ETAT NATUREL	22
5.1. Variables indépendantes de l'énergie	22
5.2. Représentation matérielle de l'énergie	23
5.3. Symétrie du tenseur total des contraintes	24
5.4. Tenseurs thermodynamiques	25
5.5. Coefficients matériels de l'énergie	25
6. EQUATIONS D'EQUILIBRE ET CONDITIONS AUX LIMITES DANS L'ETAT NATUREL	27
6.1. Equation du mouvement	27
6.2. Théorème de Gauss	27
6.3. Champ électrique et potentiel	28
6.4. Déformations	28
6.5. Conditions aux limites	28

7. SYMETRIES DES COEFFICIENTS MATERIELS	32
7.1. Symétries thermodynamiques : notation matricielle	32
7.2. Symétries cristallines	32
7.3. Changements d'axes sur les tenseurs	34
7.4. Détermination de la structure d'un tenseur d'ordre 2	35
7.5. Détermination de la structure des tenseurs de rang supérieur	37
7.6. Formules de rotation	38
 Ch.3 – VIBRATIONS AUTOUR D'UNE PREDEFORMATION STATIQUE	41
8. DECOMPOSITION DES VARIABLES	42
8.1. Décomposition du déplacement	43
8.2. Jacobien	43
8.3. Vitesse	43
8.4. Potentiel	44
8.5. Densité de charge	44
9. EQUATIONS D'EQUILIBRE ET CONDITIONS AUX LIMITES DANS L'ETAT PREDEFORME	45
9.1. Expression approchée des variables dynamiques	46
9.2. Décomposition de la déformation et du champ électrique	46
9.3. Décomposition de l'énergie	47
9.4. Décomposition des équations constitutives	48
9.5. Décomposition des équations d'équilibre	50
9.6. Décomposition des conditions aux limites	50
10. EQUATIONS D'EQUILIBRE ET CONDITIONS AUX LIMITES RAPPORTEES A L'ETAT NATUREL	52
10.1. Forme des équations d'équilibre dans l'état naturel	52
10.2. Décomposition des équations constitutives	52
10.3. Décomposition des équations d'équilibre	54
10.4. Décomposition des conditions aux limites	55
11. EQUATIONS CONSTITUTIVES DYNAMIQUES EXPRIMEES A L'AIDE DES COEFFICIENTS MATERIELS	56
11.1. Expression approchée des variables statiques	56
11.2. Expressions linéaires des coefficients des équations constitutives	57
11.3. Remarque sur les coefficients des équations constitutives	58
 Ch.4 – SOLUTIONS STATIQUE ET DYNAMIQUE, METHODE DE PERTURBATION	61
12. PREDEFORMATION D'UNE PLAQUE MINCE, SOLUTION LINEAIRE	62
12.1. Hypothèses	62
12.2. Approximation linéaire	63
12.3. Equations linéaires dans le repère de la plaque	63
12.4. Forme matricielle des équations	64
12.5. Gradients de déplacements et de potentiel statiques	65
12.6. Prédéformation dans le cas d'un champ parallèle à la plaque	66

13. VIBRATIONS D'UNE PLAQUE MINCE, SOLUTION LINEAIRE	69
13.1. Approximations linéaires	69
13.2. Equations linéaires	70
13.3. Equations aux valeurs propres	71
13.4. Vitesses et directions propres	72
13.5. Pulsations propres	73
14. METHODE DES PERTURBATIONS	74
14.1. Equations perturbées et non perturbées	74
14.2. Perturbation de l'équation du mouvement	75
14.3. Perturbation de l'équation d'équilibre électrique	76
14.4. Perturbation de fréquence	76
Ch.5 - L'EFFET ELECTROELASTIQUE, COEFFICIENTS MATERIELS ELECTROELASTIQUES	79
15. EXPRESSION DE LA PERTURBATION DE FREQUENCE	80
15.1. Perturbation de fréquence dans le repère de la plaque	80
15.2. Perturbation homogène et inhomogène	81
15.3. Perturbation en fonction des gradients de déplacements et de potentiel	82
15.4. Perturbation dans le cas de l'effet électroélastique	83
15.5. Perturbation dans le cas d'un champ parallèle à la plaque	84
16. DETERMINATION DES COEFFICIENTS ELECTROELASTIQUES	86
16.1. Equations électroélastiques	87
16.2. Coefficients électroélastiques	88
16.3. Représentation de l'effet électroélastique	90
16.4. Coefficients phénoménologiques et matériels	100
Ch.6 - LES IMPURETES DANS LE QUARTZ	103
17. RAPPELS SUR LA STRUCTURE ET LA COMPOSITION DU QUARTZ	104
17.1. Structure cristalline	104
17.2. Les impuretés dans le quartz	104
18. LES METHODES D'INVESTIGATION	109
18.1. Mesure de conductivité	109
18.2. Traceurs radioactifs	111
18.3. Absorption infra-rouge	111
18.4. Absorption optique et luminescence	112
18.5. Résonance paramagnétique	112
18.6. Relaxation diélectrique	113
18.7. Pertes acoustiques (relaxation anélastique)	114
18.8. Variation de fréquence sous l'effet de radiations ionisantes	115
18.9. Relaxation en champ fort	117

Ch.7 – EFFET DE LA DIFFUSION SUR LA FREQUENCE	119
19. MODELE DE DIFFUSION UNIDIMENSIONNELLE	120
19.1. Hypothèses	120
19.2. Equations de diffusion	121
19.3. Conditions aux limites	123
19.4. Equation générale	123
20. REGIME STATIONNAIRE DE DIFFUSION	125
20.1. Equations dans le cas stationnaire	125
20.2. Equation du potentiel	125
20.3. Equations simplifiées dans le cas de forts potentiels	126
20.4. Cas où l'on peut obtenir une solution analytique	127
20.5. Cas général du régime stationnaire : résolution numérique	131
21. VARIATION DE FREQUENCE APRES DIFFUSION	136
21.1. Résumé du problème	136
21.2. Cas de la solution analytique	137
21.3. Cas de la solution numérique	140
21.4. Evolution de la variation de fréquence en fonction de la température	140
Ch.8 – TECHNIQUES EXPERIMENTALES	145
22. CONTRAINTES EXPERIMENTALES	146
22.1. Choix des échantillons	146
22.2. Choix des conditions expérimentales	147
22.3. Premières expériences	147
23. DISPOSITIF EXPERIMENTAL	149
23.1. L'oscillateur	149
23.2. Contrôle et mesure de la température	150
23.3. Haute tension	150
23.4. Mesure de la fréquence	150
23.5. Déroulement de l'expérience	150
24. RESULTATS EXPERIMENTAUX	152
Ch.9 – EXPLOITATION DES RESULTATS	155
25. DETERMINATION EXPERIMENTALE DES ENERGIES D'ACTIVATION	156
25.1. Identification de la loi de variation	156
25.2. Régression exponentielle	158
25.3. Evolution des constantes de temps en fonction de la température	160
26. INTERPRETATION DES RESULTATS EXPERIMENTAUX	163
26.1. Détermination de l'énergie d'ionisation et de la concentration d'impuretés	163
26.2. Comportement de la fréquence au moment de la mise sous tension	166

27. IDENTIFICATION DES IMPURETES : MESURES DES PERTES ACOUSTIQUES	168
27.1. Dispositif expérimental	168
27.2. Résultats expérimentaux	168
CONCLUSION	173
ANNEXES	175
An.A - COEFFICIENTS MATERIELS DE L'ENERGIE	175
1. Permittivité relative du 2e ordre	175
2. Coefficients piézoélectriques du 2e ordre	176
3. Coefficients élastiques du 2e ordre	177
4. Permittivité du 3e ordre	178
5. Coefficients électroélastiques	179
6. Coefficients d'électrostriction	181
7. Coefficients élastiques du 3e ordre	182
8. Remarque sur les coefficients piézoélectriques	183
An.B - CONVENTION D'ORIENTATION DES PLAQUES	185
An.C - GROUPES DE LAUE	187
An.D - MATRICES DES GENERATEURS DES CLASSES CRISTALLINES	189
1. Définition des générateurs	189
2. Matrices	189
An.E - ORGANIGRAMMES DES PROGRAMMES DE DETERMINATION DES COEFFICIENTS ELASTIQUES DU 4e ORDRE	191
1. Détermination des systèmes homogènes	191
2. Résolution des systèmes homogènes	192
An.F - COEFFICIENTS ELASTIQUES INDEPENDANTS DU 4e ORDRE POUR LES 11 GROUPES DE LAUE ET LE CAS ISOTROPE	193
An.G - FORMULES DE ROTATION MATRICIELLES AUTOUR D'UN AXE	197
BIBLIOGRAPHIE	213

INTRODUCTION

La progression des connaissances scientifiques nécessite aujourd'hui des mesures sans cesse plus précises ; de même, l'accroissement des performances technologiques dans des domaines aussi variés que la navigation, les communications ou l'astronautique, requiert un contrôle de plus en plus fin et de plus en plus rapide des processus mis en jeu. En conséquence, on assiste à un développement considérable de la métrologie des fréquences parce que la fréquence est la grandeur que l'on sait actuellement mesurer avec la plus grande précision. Chaque fois que cela est possible on cherche ainsi à convertir en fréquence la grandeur physique à mesurer, d'où l'intérêt porté aux capteurs réalisant cette conversion et notamment aux dispositifs acoustiques à ondes de volume ou de surface. La base de temps constitue, en outre, le coeur de la plupart des dispositifs modernes de mesure et de contrôle.

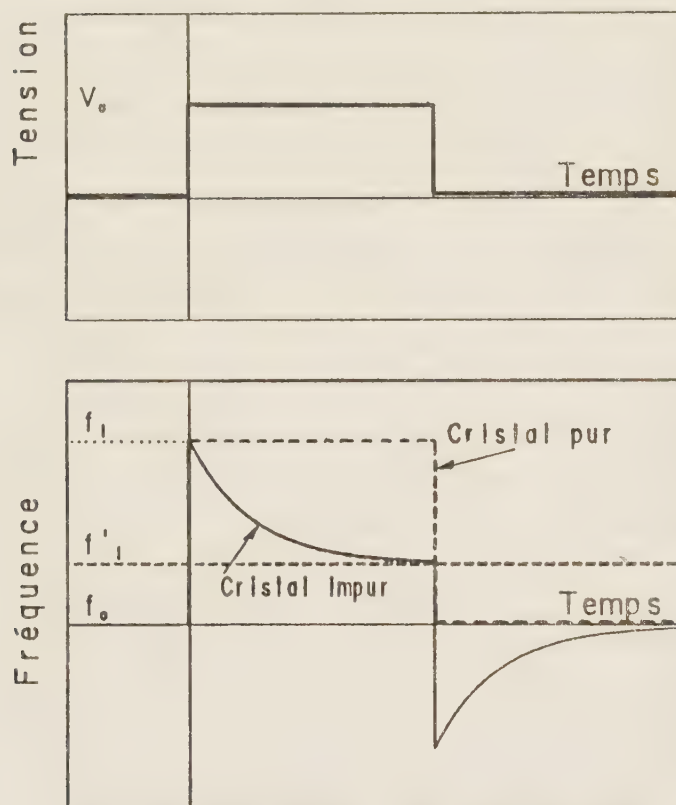
Parmi les procédés utilisés pour réaliser les composants remplissant ces fonctions, les matériaux piézoélectriques jouent un rôle privilégié ; le quartz en particulier, a pris une importance considérable : une grande pureté naturelle, des propriétés physiques bien définies et stables même dans un environnement sévère, des performances métrologiques incontestables sous un encombrement réduit alliées à une grande disponibilité et à un coût relativement faible dûs aux progrès des procédés de synthèse, font de lui le matériau de prédilection des dispositifs temps-fréquence.

Il a pourtant son talon d'Achille.

Naturel ou artificiel, le quartz le plus pur contient des traces d'impuretés et l'on sait depuis longtemps que cette pollution peut nuire à la qualité métrologique du cristal. Tellement peu croyait-on, que ce fait a été considéré comme secondaire jusqu'au moment où il est apparu que les impuretés rendaient le quartz extrêmement sensible aux radiations ionisantes compromettant ainsi son utilisation pour les applications spatiales et militaires.

Les avantages présentés néanmoins par l'emploi du quartz dans les bases de temps embarquées, ont provoqué un nombre impressionnant de travaux entrepris pour comprendre, mesurer et réduire l'influence néfaste des impuretés.

Un paragraphe de ce mémoire, consacré à la description d'un certain nombre de ces études, montre qu'elles font appel à des propriétés très diverses. En fait, assez peu de ces méthodes permettent d'apprécier directement l'influence des défauts ponctuels sur la fréquence d'un résonateur.



La méthode présentée dans ce mémoire repose sur l'observation expérimentale suivante (voir figure ci-contre) : Lorsqu'un champ électrique continu est appliqué sur les électrodes d'une plaque de quartz vibrant en cisaillement d'épaisseur, la fréquence du résonateur subit une variation instantanée suivie d'un retour pseudo exponentiel vers un nouvel état d'équilibre.

La variation initiale de fréquence est due à un phénomène piézoélectrique non linéaire appelé effet électroélastique tandis que le régime de relaxation est attribué à la migration d'impuretés chargées sous l'effet du champ continu appliqué. Ce déplacement entraîne une évolution lente de la fréquence du cristal provoquée par la modification progressive du potentiel statique par l'intermédiaire de l'effet électroélastique.

Bien que le phénomène ait été observé depuis longtemps, il n'a jamais été vraiment utilisé pour obtenir des renseignements quantitatifs sur les impuretés contenues dans le cristal. Son exploitation nécessite deux approches distinctes :

- l'étude de l'effet électroélastique proprement dit, permettant d'exprimer la fréquence du résonateur en fonction de la répartition du potentiel statique dans l'épaisseur du cristal.

- l'étude du phénomène de diffusion conduisant à la relation entre la répartition du potentiel et la concentration d'impuretés contenues dans le milieu.

L'amplitude de la variation de fréquence observée ne peut malheureusement pas être expliquée par le seul effet piézoélectrique inverse : l'effet électroélastique fait intervenir des tenseurs non linéaires dont le plus important - le tenseur électroélastique de rang 5 - n'est pas encore connu.

La première partie de ce mémoire (ch. 1 à 5) est donc consacrée au calcul des 8 coefficients indépendants de ce tenseur à partir des mesures expérimentales de l'effet électroélastique et à l'élaboration de la carte des variations de fréquence pour toutes les orientations possibles du résonateur et pour diverses directions du champ continu. Le calcul de ces coefficients matériels électroélastiques procède d'une analyse rigoureuse du comportement non linéaire d'un milieu continu anisotrope. D'autres coefficients, appelés phénoménologiques, ont été calculés dans le passé pour expliquer l'effet électroélastique : ils ont été définis à partir du développement des équations linéaires de la piézoélectricité et, bien que l'on puisse exprimer ces coefficients phénoménologiques en fonction des coefficients matériels, les symétries qui leur ont été attribuées ne sont pas respectées, de plus, ils dépendent de l'orientation de l'échantillon qui a servi à les déterminer et n'obéissent donc pas aux règles de rotation tensorielle.

La seconde partie (ch. 6 et 7) concerne l'étude de la diffusion des impuretés dans un milieu unidimensionnel qui conduit à la relation potentiel-concentration en régime permanent. Le modèle simplifié utilisé permet d'expliquer le sens de variation du phénomène de relaxation mais ne peut expliquer que dans certains cas l'amplitude de la variation de fréquence après diffusion dépasse la variation initiale due à l'effet électroélastique. La discussion de ce point conduit à la conclusion qu'une étude bi- ou tri-dimensionnelle de diffusion s'avère nécessaire pour effectuer une interprétation correcte des résultats expérimentaux. Il est malgré cela possible d'exprimer en première approximation la relation cherchée donnant le rapport des variations de fréquence observées après et avant diffusion en fonction de la concentration d'impuretés et en fonction de la température.

Enfin la dernière partie (ch. 8 et 9) traite de l'aspect expérimental de ce travail et montre que l'on peut accéder à l'énergie d'activation des impuretés à partir de l'évolution des constantes de temps observées en fonction de la température. Là encore, une détermination précise des énergies d'activation nécessite une analyse théorique complète de l'évolution de la fréquence

en fonction du temps mais cette étude est sans objet sur un modèle unidimensionnel puisqu'il est lui-même une première approximation. Les enregistrements expérimentaux révèlent en outre des comportements encore inexpliqués du processus de relaxation.

Cette brève présentation du mémoire montre qu'il s'agit, au moins en ce qui concerne les deux dernières parties, de la "photographie" d'un travail en cours : beaucoup de points ont été éclaircis, il en reste encore à élucider.

Quelques mots encore sur la structuration du texte lui-même : il est divisé en 27 paragraphes regroupés en 9 chapitres. Les renvois, les formules, les figures et les tables sont toujours rapportés aux paragraphes numérotés en une seule séquence indépendamment des chapitres. Les références bibliographiques, classées par ordre alphabétique, ont été choisies soit à cause de la clarté de l'exposé, soit à cause de leur facilité d'accès, soit parce qu'elles contenaient les plus récents développements du sujet traité, plus que dans un souci de reconstitution historique. On trouvera à ce propos des articles-revues ou des ouvrages comportant une bibliographie complète parmi les références citées.

CHAPITRE 1

EQUATIONS GENERALES DE L'ELECTROELASTICITE

Après quelques rappels concernant la définition et les propriétés des variables et des opérateurs utilisés pour l'analyse non linéaire des milieux continus, les lois générales de conservation (masse, impulsion, énergie ...) sont exprimées dans l'état déformé sous forme intégrale d'abord, puis sous forme locale tensorielle. Le choix des variables thermodynamiques, guidé par la nature du problème à traiter, conduit à l'expression du potentiel de Gibbs à partir duquel seront définis les coefficients matériels.

1. DEFINITIONS ET PROPRIETES DES MILIEUX CONTINUS

[TOUPIN, 1956] [TRUESDELL, 1960] [THURSTON, 1964] [TIERSTEN, 1971]

1.1. Description du milieu

La description mathématique du comportement d'un milieu continu passe par deux systèmes d'équations :

a. Les équations d'équilibre :

Elles expriment la conservation de la masse, de la quantité de mouvement, du moment cinétique, de l'énergie et de l'électricité.

b. Les relations constitutives :

Elles caractérisent un milieu particulier, relient la contrainte aux autres variables, précisent le flux d'énergie non mécanique et relient les variables thermodynamiques entre elles. On peut citer parmi elles : la loi de Hooke, la loi de Fick concernant la diffusion de la chaleur, l'équation d'état des gaz, etc.

1.2. Les différents types de représentation : coordonnées matérielles et spatiales

Dans un système d'axes orthonormé $\{x_1, x_2, x_3\}$ un point matériel repéré à l'instant initial t_0 par le vecteur $\vec{a}$ de composantes (a_i) sera repéré à l'instant t par le vecteur $\vec{x}$ de composantes (x_i) (Fig. 1.1).

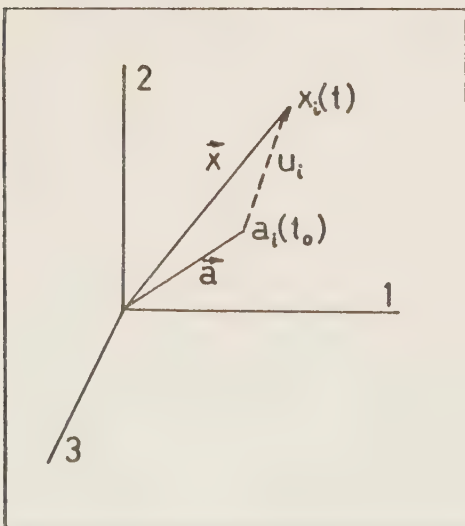


Fig. 1.1

Représentations et variables matérielles et spatiales

$\vec{x}$ est la position à l'instant t du vecteur initialement en $\vec{a}$

Le comportement du milieu continu pourra être décrit à l'aide des variables (a_i, t) ou des variables (x_i, t) .

La position x_i à l'instant t d'un point initialement en a_i s'exprime par la relation :

$$x_i = x_i(a_i, t) \quad (1.1)$$

De façon générale les variables (a_i, t) décrivent au cours du temps le comportement d'une particule de matière, pour cette raison la représentation est dite matérielle (ou lagrangienne). La définition même de x_i permet d'écrire

$$a_i = x_i(a_i, t_0) \quad (1.2)$$

où t_0 désigne l'instant initial.

Les variables (x_i, t) sont utilisées pour décrire ce qui se passe en un point géométriquement fixé, on les utilise principalement pour préciser comment évolue au cours du temps en un point x_i , l'état du champ des vitesses, des pressions, etc. Cette représentation est dite spatiale (ou eulérienne).

1.3. Dérivation par rapport au temps

Il faut distinguer entre : la variation par rapport à t d'une quantité (champ) en un endroit précis x_i , que l'on nomme dérivée spatiale, et la variation par rapport à t d'une quantité liée à une particule initialement en a_i , appelée dérivée matérielle.

La vitesse $\vec{v}$ d'une particule matérielle initialement en a_i est définie par la dérivée par rapport au temps de la variable x_i :

$$v_i = \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)_{a_i = \text{cte}} \quad (1.3)$$

Plus généralement, si l'on considère un champ quelconque représenté par $f(a_i, t)$ en description matérielle et $F(x_i, t)$ en description spatiale, on appelle dérivée matérielle du champ F l'expression :

$$\dot{F} = \frac{dF}{dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{a_i = \text{cte}} \quad (1.4)$$

On montre que cette dérivée matérielle s'exprime en coordonnées spatiales par

$$\dot{F} = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} F \quad (1.5)$$

Le premier terme de la somme exprime la variation de F au point de coordonnées x_i tandis que le second résulte du mouvement de la particule dans un champ qui varie avec x_i .

Les composantes spatiales de l'accélération s'écrivent par exemple :

$$\dot{v}_j = \frac{\partial v_j}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{\partial v_j}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} v_j \quad (1.6)$$

1.4. Jacobien d'une déformation

On appelle déterminant fonctionnel ou jacobien [BASS, 1968, ch.22] l'expression suivante :

$$J = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial a_j}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \frac{\partial x_1}{\partial a_2} & \frac{\partial x_1}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \frac{\partial x_2}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial a_1} & \frac{\partial x_3}{\partial a_2} & \frac{\partial x_3}{\partial a_3} \end{vmatrix} \quad (1.7)$$

On montre que le jacobien possède les propriétés suivantes :

$$J^{-1} = \det\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right) \quad (1.8)$$

$$J = \lim_{dV_0 \rightarrow 0} \left(\frac{dV}{dV_0} \right) \quad (1.9)$$

où V_0 et V sont respectivement les volumes avant et après déformation.

$$\frac{1}{J} \frac{dJ}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \text{div } \vec{v} \quad (1.10)$$

Si ρ_0 et ρ désignent respectivement les masses volumiques avant et après déformation, la loi de conservation de la masse permet d'écrire :

$$\boxed{J = \frac{dV}{dV_0} = \frac{\rho_0}{\rho}} \quad (1.11)$$

1.5. Propriétés par unité de volume et par unité de masse

Soit $F(x_i, t)$ une propriété matérielle d'un milieu exprimée par unité de volume, la même propriété $G(x_i, t)$ exprimée par unité de masse s'obtient par :

$$F = \rho G \quad (1.12)$$

Etendue à un volume V du milieu, cette propriété s'exprimera par :

$$P(t) = \iiint_V F \cdot dV = \iiint_V \rho G \cdot dV \quad (1.13)$$

et la vitesse de variation de cette propriété par :

$$\frac{dP}{dt} = \iiint_V \rho \frac{dG}{dt} \cdot dV = \iiint_V \left(\frac{dF}{dt} + F \cdot \text{div } \vec{v} \right) dV \quad (1.14)$$

On démontre cette propriété en utilisant les relations (1.5) et (1.10).

2. LOIS DE CONSERVATION EXPRIMEES DANS L'ETAT DEFORME [THURSTON, 1964]

2.1. Conservation de la masse

De la définition :

$$m = \iiint_V \rho dV \quad (2.1)$$

et de la propriété :

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (2.2)$$

on déduit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.3)$$

ou encore :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (2.4)$$

2.2. Conservation de la quantité de mouvement (équation du mouvement)

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ et le produit $\rho \vec{v}$ représentent la quantité de mouvement exprimée respectivement par unité de masse et par unité de volume.

Soient :

$\vec{F}$: le champ des forces de volume par unité de volume,

$\vec{T}$: le champ des forces mécaniques de surface par unité de surface où $\vec{n}$ désigne le vecteur unitaire normal à la surface au point où s'exerce la force $\vec{T}$.

La loi fondamentale de la dynamique, ou équation du mouvement, exprime que la vitesse de variation de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures appliquées :

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \vec{v} \cdot dV = \iiint_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot dV = \iiint_V \vec{F} dV + \iint_S \vec{T} \cdot \vec{n} dS \quad (2.5)$$

S désigne la surface fermée limitant le volume V.

2.3. Conservation du moment cinétique

Si l'on considère le cas d'un solide diélectrique ne présentant pas de densité de spin, le moment cinétique par unité de volume est représenté par le produit vectoriel : $\vec{x} \wedge \rho \vec{v}$.

En notant $\vec{G}$ le champ des couples par unité de volume, la conservation du moment cinétique impose que la vitesse de variation du moment cinétique soit égale à la somme des moments des forces extérieures appliquées :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V (\vec{x} \wedge \rho \vec{v}) dV &= \iiint_V \rho (\vec{x} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt}) dV \\ &= \iiint_V (\vec{G} + \vec{x} \wedge \vec{F}) dV + \iint_S (\vec{x} \wedge \vec{T}) dS \end{aligned} \quad (2.6)$$

$\vec{x} \wedge \vec{F}$ et $\vec{x} \wedge \vec{T}$ représentent respectivement le moment des forces de volume par unité de volume et des forces de surface par unité de surface. Dans le cas où il existerait des couples par unité de surface, il conviendrait de les ajouter au moment des forces de surface.

2.4. Conservation de l'électricité

En appelant q la densité de charges libres après déformation dans le diélectrique et $\vec{j}$ le vecteur densité de courant, la conservation de l'électricité se traduit par une relation analogue à la relation (2.3) [STRATTON, 1941, ch.1]

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 \quad (2.7)$$

Si q_0 désigne la densité de charges libres avant déformation, il existe entre q et q_0 une relation analogue à (1.11) :

$$j = \frac{dV}{dV_0} = \frac{q_0}{q} \quad (2.8)$$

2.5. Equations de Maxwell [RAMO, 1965, ch.4]

L'absence de phénomènes de type magnétique et l'utilisation de l'approximation des états quasi stationnaires, justifiée par l'ordre de grandeur des vitesses de variation dans les phénomènes physiques étudiés, permettent de décrire le comportement électrique du milieu à l'aide d'équations simplifiées :

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad (2.9)$$

Cette relation, où $\vec{E}$ représente le champ macroscopique local total (champ de Maxwell), exprime la nature conservative de cette grandeur qui dérive d'un potentiel scalaire :

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi \quad (2.10)$$

Le théorème de Gauss s'écrit en outre :

$$\text{div } \vec{D} = q \quad (2.11)$$

avec :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (2.12)$$

où $\vec{D}$ représente le vecteur déplacement électrique et $\vec{P}$ le vecteur polarisation par unité de volume. Le vecteur polarisation par unité de masse sera désigné par $\vec{\Pi}$:

$$\vec{P} = \rho \vec{\Pi} \quad (2.13)$$

2.6. Conservation de l'énergie

Avant d'énoncer la loi exprimant la conservation de l'énergie, il convient d'analyser l'environnement dans lequel se trouve le solide : celui-ci est soumis à des forces de volume qui peuvent être d'origine mécanique (gravité par exemple) ou électrique (polarisation), dans ce dernier cas les composantes des forces de volume d'origine électrique par unité de volume s'expriment par [NYE, 1976, ch.4] :

$$F_i^E = P_j \frac{\partial E_i}{\partial x_j} \quad (2.14)$$

Ce solide est, de plus, soumis à un couple par unité de volume résultant de la différence de direction entre $\vec{E}$ et $\vec{P}$ [STRATTON, 1941, ch.3] :

$$\vec{G} = \vec{P} \wedge \vec{E} \quad (2.15)$$

Le bilan énergétique du milieu considéré fait intervenir :

- Le travail des forces de volume et de surface :

$\vec{v} \cdot \vec{F}$: représente le travail des forces de volume par unité de temps et de volume (puissance volumique)

$\vec{v} \cdot \vec{T}$: représente le travail des forces mécaniques de surface par unité de temps et de surface (puissance mécanique de surface).

- La puissance non mécanique perdue ou acquise :

$\vec{n} \cdot \vec{H}$: est la puissance perdue par le solide à travers une surface élémentaire de normale $\vec{n}$, $\vec{H}$ désigne le flux d'énergie non mécanique (chaleur par exemple)

$$\vec{E} \cdot \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{E} \cdot \frac{d(\rho \vec{\Pi})}{dt} \quad (2.16)$$

représente la puissance reçue sous forme électrique par unité de volume, $\vec{\Pi}$ étant le vecteur polarisation par unité de masse (éq. (2.13)).

Soient :

$\mathcal{E}$: l'énergie cinétique par unité de volume

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 \quad (2.17)$$

$\mathcal{U}$ et U : l'énergie interne respectivement par unité de volume et de masse :

$$\mathcal{U} = \rho U \quad (2.18)$$

$\mathcal{E} + \mathcal{U}$ représente l'énergie totale par unité de volume :

$$\mathcal{E} + \mathcal{U} = \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 + \rho U \quad (2.19)$$

La loi de conservation de l'énergie se traduit par l'égalité entre la vitesse de variation de l'énergie totale et la somme des puissances reçues par le milieu :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V (\mathcal{E} + \mathcal{U}) dV &= \iiint_V \rho \left(\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dU}{dt} \right) \\ &= \iiint_V (\vec{v} \cdot \vec{F} + \rho \vec{E} \cdot \frac{d\vec{\Pi}}{dt}) dV + \iint_S (\vec{v} \cdot \vec{T} - \vec{n} \cdot \vec{H}) dS \end{aligned} \quad (2.20)$$

3. FORMES LOCALES DES EQUATIONS DANS L'ETAT DEFORME

3.1. Equations de Maxwell

Sous forme tensorielle, l'équation (2.9) s'écrit :

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_j} = \frac{\partial E_j}{\partial x_i} \quad (3.1)$$

tandis que la relation champ-potentiel (2.10) devient :

$$E_i = - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (3.2)$$

et le théorème de Gauss (2.11)

$$\boxed{\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = q} \quad (3.3)$$

avec :

$$D_i = \epsilon_0 E_i + P_i \quad (3.4)$$

3.2. Tenseurs des contraintes

En désignant par T_i^n et n_j les composantes du vecteur $\vec{T}$ et de la normale $\vec{n}$ introduits au §2.2, le tenseur des contraintes mécaniques T_{ji}^M est défini par la relation [THURSTON, 1964] :

$$T_i^n = T_{ji}^M n_j \quad (3.5)$$

tandis que le tenseur de Maxwell ou tenseur des contraintes électriques noté T_{ji}^E s'écrit [TOUPIN, 1956] :

$$T_{ji}^E = D_j E_i - \frac{\epsilon_0}{2} E_k E_k \delta_{ji} \quad (3.6)$$

où δ_{ji} est le symbole de Kronecker.

Compte tenu de l'expression (3.4) on peut aussi écrire :

$$T_{ji}^E = P_j E_i + \epsilon_0 (E_j E_i - \frac{1}{2} E_k E_k \delta_{ji}) \quad (3.7)$$

Les composantes F_i^E des forces de volume d'origine électrique définies au §2.6 sont liées au tenseur de Maxwell par la relation :

$$F_i^E = \frac{\partial T_{ji}^E}{\partial x_j} = P_j \frac{\partial E_i}{\partial x_j} \quad (3.8)$$

Les contraintes totales s'exerçant sur un élément de volume du solide diélectrique sont la somme des contraintes d'origines mécanique et électrique, le tenseur total des contraintes s'écrit par conséquent :

$$T_{ji} = T_{ji}^M + T_{ji}^E \quad (3.9)$$

3.3. Formes locales des équations d'équilibre

- La relation (2.4) exprime la forme locale de la conservation de la masse qui peut également s'écrire :

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0} \quad (3.10)$$

- La loi de conservation de l'impulsion (2.5) devient sous forme locale :

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = F_i + \frac{\partial T_{ji}^M}{\partial x_j} \quad (3.11)$$

où T_{ji}^M est le tenseur des contraintes défini au §3.2 Eq. (3.5).

Si l'on sépare les forces de volume selon leur origine mécanique ou électrique :

$$F_i = F_i^M + F_i^E \quad (3.12)$$

les équations (3.8) et (3.9) permettent d'écrire l'équation du mouvement sous la forme :

$$\boxed{\rho \frac{dv_i}{dt} = F_i^M + \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j}} \quad (3.13)$$

où F_i^M représente les forces de volume d'origine purement mécanique et T_{ji} le tenseur total des contraintes.

- Lorsque l'on utilise la conservation de l'impulsion (3.11) pour exprimer la forme locale de la conservation du moment cinétique (2.6), on s'aperçoit qu'elle conduit à l'identité suivante :

$$T_{ji}^M - T_{ij}^M = P_i E_j - P_j E_i \quad (3.14)$$

qui exprime la partie antisymétrique du tenseur des contraintes mécaniques.

- La loi de conservation de l'électricité (2.7), déjà écrite sous forme locale, s'écrit aussi :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0} \quad (3.15)$$

- Compte tenu de la conservation de l'impulsion (3.11), la conservation de l'énergie (2.20) s'écrit sous forme locale :

$$\rho \frac{dU}{dt} = \rho E_i \frac{d\pi_i}{dt} + T_{ji}^M \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial H_j}{\partial x_j} \quad (3.16)$$

Cette relation montre que U possède une différentielle totale : c'est l'expression du 1er principe de la thermodynamique.

3.4. Conditions aux limites

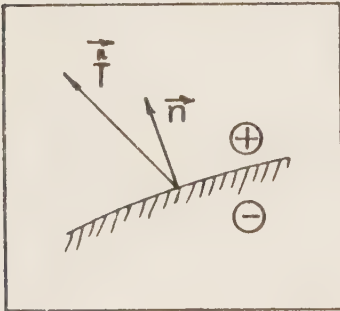


Fig. 3.1

$\vec{n}$ désigne le vecteur unitaire normal à la surface de séparation au point où s'exerce la force mécanique de surface $\vec{T}$, il est orienté positivement vers l'extérieur du milieu étudié.

- Conditions aux limites mécaniques (cf Fig. 3.1) :

La différence entre les efforts du côté (+) et du côté (-) est égale aux forces de surface, on doit donc avoir [TRUESDELL, 1960, sec. 203] :

$$\boxed{(T_{ji}^+ - T_{ji}^-) n_j = T_i^n} \quad (3.17)$$

- Conditions aux limites électriques :

Rappelons ici que la différence entre les composantes normales du vecteur induction du côté (+) et du côté (-) est égale à la densité des charges de surface [TRUEDELL, 1960, sec. 278] :

$$(D_i^+ - D_i^-)n_i = \sigma \quad (3.18)$$

et que le potentiel est continu :

$$\phi^+ - \phi^- = 0 \quad (3.19)$$

4. CONSEQUENCES DES PRINCIPES THERMODYNAMIQUES

4.1. Premier et second principes

Le premier principe est exprimé par l'équation (3.16) qui montre que l'énergie interne U possède une différentielle totale. Le second membre de cette équation est composé de trois termes, les deux premiers représentent la variation d'énergie apportée au système par unité de masse et de temps sous forme de travail tandis que le troisième exprime l'énergie apportée au système par unité de masse et de temps sous forme de chaleur (elle est négative puisque $\vec{H}$ désigne le flux d'énergie non mécanique perdue par le système (cf. §2.6). Le second principe de la thermodynamique utilise cette énergie pour définir la fonction S , entropie du système par unité de masse, possédant une différentielle totale :

$$\rho T \frac{dS}{dt} = - \frac{\partial H_j}{\partial x_j} \quad (4.1)$$

T est la température absolue.

4.2. Energie interne

On appelle gradients de déformation [TRUESDALL, 1960, sec.17] en description matérielle et spatiale, les quantités $\frac{\partial x_i}{\partial a_j}$ et $\frac{\partial a_i}{\partial x_j}$, l'énergie interne U peut s'exprimer à l'aide des variables indépendantes : entropie, polarisation et gradients de déformation, l'équation (3.16) s'écrit alors :

$$\rho \frac{dU}{dt} = \rho E_i \frac{d\Pi_i}{dt} + T_{ji}^M \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_k} \right) + \rho T \frac{dS}{dt} \quad (4.2)$$

4.3. Potentiel de Gibbs

La nature des phénomènes étudiés conduit à utiliser comme variables indépendantes : la température absolue, le champ électrique et les gradients de déformation, ce qui amène à utiliser comme fonction d'état non plus l'énergie interne mais le potentiel de Gibbs par unité de masse : $\chi(T, E_i, \frac{\partial x_i}{\partial a_j})$ que l'on déduit de U par une transformation de Legendre :

$$\chi = U - TS - \Pi_i E_i \quad (4.3)$$

La différentielle de cette nouvelle fonction d'état prend la forme suivante :

$$\rho \frac{d\chi}{dt} = T_{ji}^M \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_k} \right) - \rho S \frac{dT}{dt} - \rho \Pi_i \frac{dE_i}{dt} \quad (4.4)$$

Les variables T_{ji}^M , S et Π_i s'expriment alors en écrivant que χ est une différentielle totale :

$$T_{ji}^M = \rho \frac{\partial x_i}{\partial a_k} \frac{\partial \chi}{\partial \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_k} \right)} \quad (4.5)$$

$$S = - \frac{\partial \chi}{\partial T} \quad (4.6)$$

$$\Pi_i = - \frac{\partial \chi}{\partial E_i} \quad (4.7)$$

CHAPITRE 2

EQUATIONS GENERALES DANS L'ETAT NATUREL : LES COEFFICIENTS MATERIELS

L'invariance du potentiel de Gibbs, défini dans le précédent chapitre, lors d'un changement de repère nécessite le choix de variables elles-mêmes rotationnellement invariantes.

Ces variables, généralement rapportées à l'état naturel, sont exprimées en fonction des variables de l'état final et utilisées pour donner la forme rotationnellement invariante du potentiel de Gibbs et définir les coefficients matériels de l'énergie.

L'utilisation de ces coefficients dans les équations d'équilibre impose que celles-ci soient exprimées elles-mêmes dans l'état naturel, on donne par conséquent les relations de passage entre grandeurs exprimées dans l'état final et dans l'état naturel.

La fin du chapitre est consacrée aux propriétés particulières des tenseurs représentatifs des coefficients matériels : symétries, relations de dépendance et formules de rotation. La technique mise en oeuvre et les résultats obtenus représentent un apport original à l'étude des propriétés physiques tensorielles des cristaux.

5. EXPRESSION DE L'ENERGIE RAPPORTEE A L'ETAT NATUREL

Les variables utilisées pour définir le potentiel de Gibbs $\chi(T, E_i, \frac{\partial x_i}{\partial a_j})$ ne permettent pas de conclure que cette fonction est rotationnellement invariante. En utilisant le théorème de Cauchy sur les fonctions invariantes [TIERSTEN, 1971], on peut montrer que le potentiel de Gibbs χ pourra être considéré comme rotationnellement invariant si on peut l'exprimer à l'aide d'un polynôme de degré suffisamment élevé des variables : température, champ électrique rapporté à l'état non déformé (état naturel) et déformations.

5.1. Variables indépendantes de l'énergie

- Champ électrique rapporté à l'état naturel :

Le champ électrique défini par la relation :

$$E_i = - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (\text{cf. (3.2)})$$

est décrit en représentation spatiale, nous appellerons ξ_i sa représentation matérielle (expression dans l'état naturel) :

$$\xi_i = - \frac{\partial \phi}{\partial a_i} = E_j \frac{\partial x_j}{\partial a_i}$$

 (5.1)

- Déformation [THURSTON, 1964]

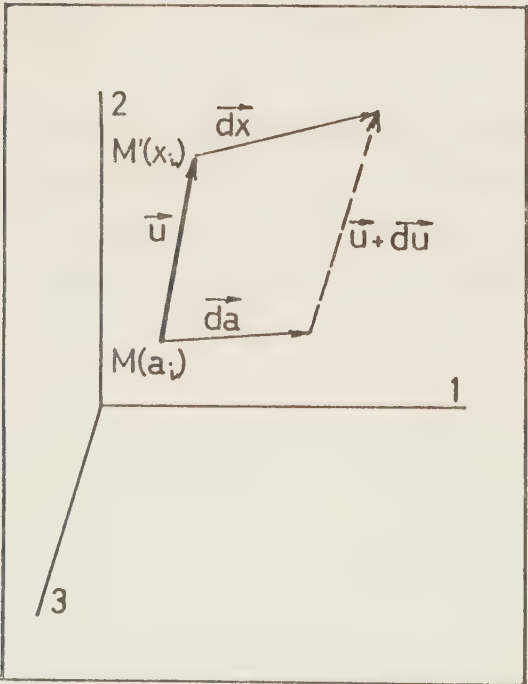


Fig. 5.1
Un vecteur matériel da d'origine M se déforme en dx d'origine M' ,
 $\vec{u} = \vec{MM'}$ représente le déplacement

Au cours du temps, un vecteur matériel $\vec{da}$ d'origine $M(a_i)$ devient $\vec{dx}$ d'origine $M'(x_i)$ (Fig. 5.1), on appelle déplacement le vecteur

$$\vec{u} = \vec{MM'} \quad , \quad u_i = x_i - a_i \quad (5.2)$$

et déformation matérielle le tenseur symétrique de rang 2 : η_{ij} défini par la relation :

$$\vec{dx}^2 - \vec{da}^2 = 2\eta_{ij} da_i da_j \quad (5.3)$$

Ce tenseur peut s'écrire :

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \frac{\partial u_k}{\partial a_j} \right) \quad (5.4)$$

ou encore :

$$\boxed{\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_k}{\partial a_j} - \delta_{ij} \right)} \quad (5.5)$$

5.2. Représentation matérielle de l'énergie

A l'aide des variables ainsi définies, la différentielle du potentiel de Gibbs prend la forme suivante :

$$\boxed{\rho \frac{d\chi}{dt} = (T_{ji}^M + \rho \Pi_j E_i) \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_l}{\partial x_j} \frac{d\eta_{kl}}{dt} - \rho S \frac{dT}{dt} - \rho \Pi_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_j}{dt}} \quad (5.6)$$

dans laquelle les variables T_{ji}^M , S et Π_i s'expriment par :

$$T_{ji}^M = \rho \frac{\partial x_i}{\partial a_k} \frac{\partial x_j}{\partial a_l} \frac{\partial \chi}{\partial \eta_{kl}} + \rho E_i \frac{\partial x_j}{\partial a_k} \frac{\partial \chi}{\partial \xi_k} \quad (5.7)$$

$$S = - \frac{\partial \chi}{\partial T} \quad (\text{cf. (4.6)})$$

$$\Pi_i = - \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \frac{\partial \chi}{\partial \xi_j} \quad (5.8)$$

et d'après (2.13) :

$$P_i = \rho \Pi_i = -\rho \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \frac{\partial \chi}{\partial \tilde{c}_j} \quad (5.9)$$

5.3. Symétrie du tenseur total des contraintes

Des relations (5.7) et (5.8) il résulte que le tenseur des contraintes mécaniques peut s'écrire :

$$T_{ji}^M = \rho \frac{\partial x_i}{\partial a_k} \frac{\partial x_j}{\partial a_l} \frac{\partial \chi}{\partial \eta_{kl}} - \rho \Pi_j E_i \quad (5.10)$$

Nous avons vu au §3.2 que le tenseur total des contraintes était la somme du tenseur des contraintes mécaniques et du tenseur de Maxwell (Eq. (3.9)) ce qui peut s'écrire, compte tenu des relations (2.13), (3.7) et (5.10) :

$$T_{ji} = T_{ji}^M + T_{ji}^E = \rho \frac{\partial x_i}{\partial a_k} \frac{\partial x_j}{\partial a_l} \frac{\partial \chi}{\partial \eta_{kl}} + \epsilon_0 (E_j E_i - \frac{1}{2} E_k E_k \delta_{ji}) \quad (5.11)$$

Bien qu'aucun des tenseurs T_{ji}^M et T_{ji}^E ne soit symétrique, après simplification, leur somme est symétrique et peut être exprimée comme la somme de deux tenseurs symétriques, l'un purement mécanique, l'autre purement électrique :

$$T_{ji} = T_{ji}^{MS} + T_{ji}^{ES} \quad (5.12)$$

avec :

$$T_{ji}^{MS} = \rho \frac{\partial x_i}{\partial a_k} \frac{\partial x_j}{\partial a_l} \frac{\partial \chi}{\partial \eta_{kl}} \quad (5.13)$$

$$T_{ji}^{ES} = \epsilon_0 (E_j E_i - \frac{1}{2} E_k E_k \delta_{ji}) \quad (5.14)$$

5.4. Tenseurs thermodynamiques

Les variables conjuguées de η_{kl} , ξ_j et T utilisées dans l'expression du potentiel de Gibbs (5.6) ne sont pas elles-mêmes des quantités rotationnellement invariantes, il est cependant possible de définir des variables conjuguées invariantes en écrivant la différentielle $d\chi/dt$ sous la forme :

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{1}{\rho_0} t_{kl} \frac{d\eta_{kl}}{dt} - \frac{1}{\rho_0} p_j \frac{d\xi_j}{dt} - S \frac{dT}{dt} \quad (5.15)$$

t_{kl} et p_j s'obtiennent en identifiant les relations (5.6) et (5.15) :

$$t_{kl} = J T_{ji}^{MS} \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_l}{\partial x_j} = \rho_0 \frac{\partial \chi}{\partial \eta_{kl}} \quad (5.16)$$

$$p_j = \rho_0 \Pi_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} = -\rho_0 \frac{\partial \chi}{\partial \xi_j} \quad (5.17)$$

t_{kl} est un tenseur symétrique invariant par rotation appelé tenseur des tensions thermodynamiques ou second tenseur de Piola-Kirchhoff [THURSTON, 1964].

5.5. Coefficients matériels de l'énergie

L'utilisation des variables η_{ij} , ξ_i et T permet d'affirmer que l'énergie exprimée sous forme d'un développement polynomial de ces variables reste invariante par rotation. La température n'intervenant pas explicitement dans les phénomènes étudiés, il ne sera d'ailleurs pas nécessaire de la faire apparaître dans l'expression de l'énergie.

Les variables restantes η_{ij} et ξ_i présentent l'avantage d'être nulles dans l'état naturel.

Parmi les formes possibles que l'on peut donner au potentiel de Gibbs, on utilise habituellement la forme suivante [TIERSTEN, 1975]⁽¹⁾ :

(1) Pour garder une forme cohérente à l'expression de l'énergie, le signe du coefficient $e_{i.klmn}$ est l'opposé du signe du coefficient f_{ABCDE} de TIERSTEN.

$$\begin{aligned}
 \rho_0 \chi(\eta_{ij}, \xi_i) - \rho_0 \chi(0,0) = & \\
 & \frac{1}{2} C_{ijkl} \eta_{ij} \eta_{kl} - e_{m,ij} \xi_m \eta_{ij} - \frac{1}{2} \kappa_{ij} \xi_i \xi_j \\
 & + \frac{1}{6} C_{ijklmn} \eta_{ij} \eta_{kl} \eta_{mn} - \frac{1}{2} e_{i,klmn} \xi_i \eta_{kl} \eta_{mn} \\
 & - \frac{1}{2} e_{mn,ij} \xi_m \xi_n \eta_{ij} - \frac{1}{6} \kappa_{ijk} \xi_i \xi_j \xi_k + \text{T.O.S.}
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Les coefficients de ce développement, limité ici au troisième ordre, portent le nom de coefficients matériels. Ces tenseurs représentent les propriétés physiques du milieu étudié, le nombre de composantes indépendantes de ces tenseurs est lié aux symétries cristallines du milieu considéré et aux propriétés thermodynamiques des coefficients matériels (cf.§7).

La terminologie utilisée pour ces coefficients varie selon les auteurs. De façon générale, on appelle ordre du coefficient, le degré du terme dont il est le facteur dans le développement de l'énergie, on appellera ainsi :

C_{ijkl} et C_{ijklmn} : coefficients élastiques des 2e et 3e ordres

κ_{ij} et κ_{ijk} : susceptibilités diélectriques absolues des 2e et 3e ordres.

Le coefficient κ_{ij} est lié à la permittivité absolue ϵ_{ij} par la relation [NYE,1976,ch.4] :

$$\epsilon_{ij} = \kappa_{ij} + \epsilon_0 \delta_{ij} \tag{5.19}$$

tandis que pour le 3e ordre, la susceptibilité et la permittivité absolues sont synonymes.

$e_{m,ij}$ est le coefficient piézoélectrique du 2e ordre.

$e_{i,klmn}$ et $e_{mn,ij}$ sont les coefficients piézoélectriques du 3e ordre. Le premier est également appelé coefficient électroélastique ou élastoélectrique et le second : coefficient d'électrostriction.

Le point utilisé dans les coefficients piézoélectriques est destiné à séparer les indices relatifs aux champs électriques et aux déformations.

6. EQUATIONS D'EQUILIBRE ET CONDITIONS AUX LIMITES EXPRIMEES DANS L'ETAT NATUREL

Les équations d'équilibre locales présentées au §3 étaient exprimées à l'aide des variables spatiales x_i alors que l'énergie utilise des variables rapportées à l'état naturel (cf. §5). Pour introduire les équations constitutives dans les équations d'équilibre, il faut utiliser pour celles-ci la représentation matérielle.

6.1. Equation du mouvement

Les phénomènes étudiés ne faisant pas intervenir de forces mécaniques de volume, l'équation du mouvement (3.13) se réduit à la forme suivante :

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} \quad (6.1)$$

Exprimée dans l'état naturel, cette équation s'écrit :

$$\boxed{\rho_0 \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \zeta_{ki}}{\partial a_k}} \quad (6.2)$$

avec

$$\zeta_{ki} = J \frac{\partial a_k}{\partial x_j} T_{ji} \quad (6.3)$$

où J est le jacobien de la déformation (cf. §1.4).

ζ_{ki} est appelé premier tenseur de Piola-Kirchhoff [THURSTON, 1964].

6.2. Théorème de Gauss

L'équation (3.3) exprime le théorème de Gauss dans l'état déformé (état final). Dans l'état naturel il devient :

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{X}_k}{\partial a_k} = q_0} \quad (6.4)$$

avec (cf. (2.8)) :

$$q_0 = Jq \quad (6.5)$$

et [TIERSTEN, 1973] :

$$\mathcal{X}_k = J \frac{\partial a_k}{\partial x_j} D_j \quad (6.6)$$

6.3. Champ électrique et potentiel

La relation champ-potentiel dans l'état naturel a déjà été établie (Eq. (5.1)), rappelons la :

$$\boxed{\mathcal{E}_k = - \frac{\partial \phi}{\partial a_k}} \quad (6.7)$$

Dans la même relation (5.1) on avait :

$$\mathcal{E}_k = E_i \frac{\partial x_i}{\partial a_k} \quad (6.8)$$

6.4. Déformations

La déformation définie au §5.1, Eq. (5.5) est exprimée dans l'état naturel :

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_k}{\partial a_j} - \delta_{ij} \right) \quad (6.9)$$

6.5. Conditions aux limites (Fig. 6.1)

Ces conditions ont été établies dans l'état final au §3.4.

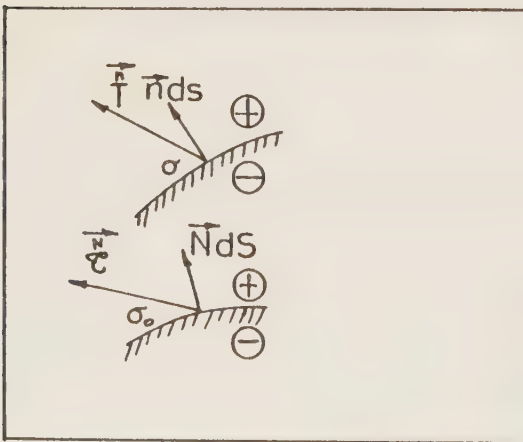


Fig. 6.1

La surface de séparation $(\vec{N}dS, \vec{T}, \sigma_0)$ dans l'état naturel devient $(\vec{n}ds, \vec{t}, \sigma)$ dans l'état final.

L'élément de surface $\vec{N}dS$ dans l'état naturel devient $\vec{n}ds$ dans l'état final tandis que les forces de surface $\vec{C}$ deviennent $\vec{T}$ et que la densité de charge σ_0 devient σ .

Les conditions aux limites dans l'état naturel sont analogues à celles obtenues dans l'état final :

$$(\mathcal{C}_{ki}^+ - \mathcal{C}_{ki}^-)N_k = \mathcal{C}_i^N \quad (6.10)$$

$$(\mathcal{X}_k^+ - \mathcal{X}_k^-)N_k = \sigma_0 \quad (6.11)$$

$$\phi^+ - \phi^- = 0 \quad (6.12)$$

Les composantes $\mathcal{C}_{ki}^+, \mathcal{C}_{ki}^-$ et $\mathcal{X}_k^+, \mathcal{X}_k^-$ sont données par les relations (6.3) et (6.6).

On montre que les composantes des vecteurs $\vec{n}ds$ et $\vec{N}dS$ sont liées par la formule de NANSON [TRUESDALL, 1960, sec. 20] :

$$n_j ds = J \frac{\partial a_k}{\partial x_j} N_k dS \quad (6.13)$$

ce qui permet d'établir les relations suivantes entre T_i^n et $\mathcal{C}_i^N$ définis par (3.17) et (6.10) :

$$\mathcal{C}_i^N dS = T_i^n ds \quad (6.14)$$

et entre σ et σ_0 définis par (3.18) et (6.11) :

$$\sigma_0 dS = \sigma ds \quad (6.15)$$

Tableau 6.A : Equations d'équilibre

Equation	Etat final	Eq.	Relation de passage	Eq.	Etat naturel	Eq.
Mouvement	$\rho \frac{dv_i}{dt} = F_i^M + \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j}$	3.13 6.1	$\tau_{ki} = J \frac{\partial a_k}{\partial x_j} T_{ji}$	6.3	$\rho_0 \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \tau_{ki}}{\partial a_k}$	6.2
Théorème de Gauss	$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = q$	3.3	$\mathcal{D}_k = J \frac{\partial a_k}{\partial x_j} D_j$	6.6	$\frac{\partial \mathcal{D}_k}{\partial a_k} = q_0$	6.4
Champ - potentiel	$E_i = - \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$	3.2	$\mathcal{E}_k = E_i \frac{\partial x_i}{\partial a_k}$	5.1 6.8	$\mathcal{E}_k = - \frac{\partial \phi}{\partial a_k}$	6.7

Tableau 6.B : Conditions aux limites

Condition	Etat déformé		Relation de passage		Etat naturel	
Conditions aux limites mécaniques	$(T_{ji}^+ - T_{ji}^-)n_j = T_i$	3.17	$N_i dS = T_i ds$ $n_j ds = J \frac{\partial a_k}{\partial x_j} N_k dS$	6.14 6.13	$(\mathcal{E}_{ki}^+ - \mathcal{E}_{ki}^-)N_k = \mathcal{E}_i$	6.10
Conditions aux limites électriques	$(D_i^+ - D_i^-)n_i = \sigma$	3.18	$\sigma_0 dS = \sigma ds$	6.15	$(\mathcal{D}_k^+ - \mathcal{D}_k^-)N_k = \sigma_0$	6.11
Conditions aux limites sur le potentiel	$\phi^+ - \phi^- = 0$	3.19			$\phi^+ - \phi^- = 0$	6.12

Tableau 6.C
Equations constitutives et relations de définition

Déformation	$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_k}{\partial a_j} - \delta_{ij} \right)$	(5.5)
Tenseur total des contraintes	$T_{ji} = T_{ji}^{MS} + T_{ji}^{ES}$	(5.12)
Tenseur symétrique des contraintes mécaniques	$T_{ji}^{MS} = \rho \frac{\partial x_i}{\partial a_k} \frac{\partial x_j}{\partial a_l} \frac{\partial \chi}{\partial \eta_{kl}}$	(5.13)
Tenseur symétrique des contraintes électriques	$T_{ji}^{ES} = \epsilon_o \left(E_j E_i - \frac{1}{2} E_k E_k \delta_{ji} \right)$	(5.14)
Déplacement électrique	$D_i = \epsilon_o E_i + P_i$	(3.4)
Polarisation	$P_i = -\rho \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \frac{\partial \chi}{\partial \mathcal{E}_j}$	(5.9)
Energie	$\begin{aligned} \rho_o \chi = & \frac{1}{2} C_{ijkl} \eta_{ij} \eta_{kl} - e_{m,ij} \mathcal{E}_m \eta_{ij} - \frac{1}{2} \kappa_{ij} \mathcal{E}_i \mathcal{E}_j \\ & + \frac{1}{6} C_{ijklmn} \eta_{ij} \eta_{kl} \eta_{mn} - \frac{1}{2} e_{i,klmn} \mathcal{E}_i \eta_{kl} \eta_{mn} \\ & - \frac{1}{2} e_{mn,ij} \mathcal{E}_m \mathcal{E}_n \eta_{ij} - \frac{1}{6} \kappa_{ijk} \mathcal{E}_i \mathcal{E}_j \mathcal{E}_k + T.O.S. \end{aligned}$	(5.18)

7. SYMETRIES DES COEFFICIENTS MATERIELS

Les coefficients matériels figurant dans le développement du potentiel de Gibbs (5.18) sont des tenseurs représentant les propriétés physiques du milieu étudié. L'examen des symétries de ces tenseurs permet d'établir des relations entre les composantes et de déterminer le nombre de composantes indépendantes nécessaires pour décrire le comportement du milieu [DIEULESAINT, 1974, ch.3].

7.1. Symétries thermodynamiques : notation matricielle

Le tenseur η_{ij} étant symétrique (cf. (5.5)) l'expression (5.18) de l'énergie ne doit pas changer lorsque l'on permute les deux indices de la déformation. De plus, l'énergie ne doit pas dépendre de l'ordre dans lequel sont écrits les produits de deux ou trois déformations ou de deux ou trois champs électriques. Il résulte de ces considérations que les indices des coefficients matériels présentent les propriétés de symétries résumées sur le tableau 7.A. Ce tableau montre également la façon dont on peut contracter certains indices en utilisant la notation matricielle de Voigt [NYE, 1976, ch.7] dans laquelle les indices contractés varient de 1 à 6 suivant le schéma :

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

7.2. Symétries cristallines

En plus des symétries thermodynamiques, les coefficients matériels doivent inclure les propriétés de symétrie du groupe ponctuel auquel appartient le cristal considéré (principe de Neumann). La classe 32 à laquelle appartient le quartz est caractérisée par un axe d'ordre 3 (axe a_3), et un axe d'ordre 2 perpendiculaire (axe a_1), l'axe a_2 étant dirigé de telle sorte que $\{a_1, a_2, a_3\}$ constitue un repère orthogonal direct⁽¹⁾.

(1) Un axe est dit d'ordre n lorsqu'une rotation de $2\pi/n$ autour de cet axe fait retrouver une configuration identique.

Tableau 7.A

Symétries thermodynamiques des coefficients matériels

Les indices minuscules varient de 1 à 3 et les indices majuscules varient de 1 à 6.

coefficients	indices développés	permutations possibles sur les indices	indices contractés	permutation possible
coef. élastique 2e ordre	C_{ijkl}	$i \leftrightarrow j, k \leftrightarrow l$ $ij \leftrightarrow kl$	C_{IJ}	$I \leftrightarrow J$
coef. élastique 3e ordre	C_{ijklmn}	$i \leftrightarrow j, k \leftrightarrow l, m \leftrightarrow n$ $ij \leftrightarrow kl, ij \leftrightarrow mn, kl \leftrightarrow mn$	C_{IJK}	$I \leftrightarrow J, I \leftrightarrow K$ $J \leftrightarrow K$
coef. piézoélectrique 2e ordre	$e_{m.ij}$	$i \leftrightarrow j$	$e_{m.I}$	
coef. électroélastique	$e_{i.klmn}$	$k \leftrightarrow l, m \leftrightarrow n$ $kl \leftrightarrow mn$	$e_{i.JK}$	$J \leftrightarrow K$
coef. électrostriction	$e_{mn.ij}$	$m \leftrightarrow n, i \leftrightarrow j$	$e_{mn.I}$	$m \leftrightarrow n$
permittivité 2e ordre	κ_{ij}	$i \leftrightarrow j$		
permittivité 3e ordre	κ_{ijk}	$i \leftrightarrow j, i \leftrightarrow k$ $j \leftrightarrow k$		

Les propriétés de symétrie réduisent considérablement le nombre de coefficients nécessaires pour représenter une propriété physique déterminée, par exemple les coefficients élastiques initialement au nombre de 81 ne sont plus que 21 après application des symétries thermodynamiques. Si l'on ajoute les symétries correspondant à la classe 32 il ne reste que 12 coefficients non nuls dont 6, appelés coefficients indépendants, suffisent pour déterminer tous les autres.

Les tableaux de l'annexe A montrent les coefficients matériels connus du quartz droit, les relations de dépendance ainsi que les valeurs numériques des coefficients indépendants.

7.3. Changement d'axe sur les tenseurs

L'énergie (5.18) est invariante dans une rotation quelconque des axes mais les coefficients matériels utilisés dépendent du repère choisi. Les valeurs tabulées à l'annexe A sont rapportées à des axes particuliers $\{a_1, a_2, a_3\}$ appelés repères cristallographiques. La norme IEEE STD 176 [IRE, 1949] utilisée dans ce mémoire précise pour chaque classe cristalline la nature du repère de référence (cf. annexe B).

Lorsque l'on veut exprimer l'énergie dans un autre repère $\{a'_1, a'_2, a'_3\}$ il faut connaître la matrice de passage p_{ij} d'un repère à l'autre. Si un vecteur $\vec{OM}$ a pour composantes a_j dans le repère de référence, ses composantes a'_i dans l'autre repère sont données par [JEFFREYS, 1961, ch.1] :

$$a'_i = p_{ij} a_j \quad (7.2)$$

Les tenseurs se transforment de la façon suivante :

- rang 2 :

$$\kappa'_{ij} = p_{ik} p_{jl} \kappa_{kl} \quad (7.3)$$

- rang 3 :

$$e'_{m,ij} = p_{mn} p_{ik} p_{jl} e_{n,kl} \quad (7.4)$$

etc.

7.4. Détermination de la structure d'un tenseur d'ordre 2 pour la classe 32

On peut utiliser le fait que l'énergie écrite sous la forme (5.18) doit être invariante par rotation, et particulièrement dans une rotation correspondant à une symétrie du cristal pour déterminer les relations d'interdépendance, les composantes indépendantes et les composantes nulles des tenseurs correspondant aux coefficients matériels. Cette méthode manuelle convient pour les tenseurs de rang peu élevé (coefficients du 2e ordre), pour les autres il est possible de mettre à profit le caractère systématique des changements d'axes sur les tenseurs en utilisant une méthode numérique qui sera exposée sur un exemple simple, celui des susceptibilités κ_{ij} du quartz.

L'axe a_1 étant d'ordre 2, les propriétés du cristal ne changent pas lorsque l'on effectue une rotation de π autour de cet axe, cette rotation, appelée générateur de la classe cristalline (cf. annexe C) a pour matrice

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

Les coefficients obtenus après rotation sont identiques aux coefficients initiaux, la relation (7.3) devient :

$$\kappa_{ij} = P_{ik} P_{jl} \kappa_{kl} \quad (7.6)$$

Pour vérifier ces identités, la structure du tenseur κ_{ij} doit être la suivante :

$$\kappa_{ij} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ 0 & \kappa_{32} & \kappa_{33} \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

De même l'axe a_3 étant d'ordre 3, le tenseur κ_{ij} doit être invariant dans une rotation de $2\pi/3$ autour de cet axe, la matrice de ce générateur s'écrit [BIRSS, 1963] (cf. annexe D) :

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

Le développement des identités (7.6) conduit aux résultats suivants :

$$\left. \begin{aligned}
 \kappa_{11} &= \frac{1}{4} \kappa_{11} - \frac{\sqrt{3}}{4} \kappa_{12} - \frac{\sqrt{3}}{4} \kappa_{21} + \frac{3}{4} \kappa_{22} \\
 \kappa_{12} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \kappa_{11} + \frac{1}{4} \kappa_{12} - \frac{3}{4} \kappa_{21} - \frac{\sqrt{3}}{4} \kappa_{22} \\
 \kappa_{13} &= -\frac{1}{2} \kappa_{13} + \frac{\sqrt{3}}{2} \kappa_{23} \\
 \kappa_{21} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \kappa_{11} - \frac{3}{4} \kappa_{12} + \frac{1}{4} \kappa_{21} - \frac{\sqrt{3}}{4} \kappa_{22} \\
 \kappa_{22} &= \frac{3}{4} \kappa_{11} + \frac{\sqrt{3}}{4} \kappa_{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} \kappa_{21} + \frac{1}{4} \kappa_{22} \\
 \kappa_{23} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \kappa_{13} - \frac{1}{2} \kappa_{23} \\
 \kappa_{31} &= -\frac{1}{2} \kappa_{31} + \frac{\sqrt{3}}{2} \kappa_{32} \\
 \kappa_{32} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \kappa_{31} - \frac{1}{2} \kappa_{32} \\
 \kappa_{33} &= \kappa_{33}
 \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

Ces équations peuvent être ramenées à trois systèmes d'équations homogènes :

$$\left. \begin{aligned}
 3\kappa_{11} + \sqrt{3}\kappa_{12} + \sqrt{3}\kappa_{21} - 3\kappa_{22} &= 0 \\
 \kappa_{11} - \sqrt{3}\kappa_{12} - \sqrt{3}\kappa_{21} - \kappa_{22} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

$$\left. \begin{aligned}
 -3\kappa_{13} + \sqrt{3}\kappa_{23} &= 0 \\
 \kappa_{13} + \sqrt{3}\kappa_{23} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

$$\left. \begin{aligned}
 -3\kappa_{31} + \sqrt{3}\kappa_{32} &= 0 \\
 \kappa_{31} + \sqrt{3}\kappa_{32} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

κ_{33} étant indépendant.

La résolution de ces équations conduit à la structure suivante pour le tenseur κ_{ij} :

$$\kappa_{ij} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & 0 \\ -\kappa_{12} & \kappa_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

La superposition des résultats (7.7) et (7.13) conduit à la structure des tenseurs d'ordre 2 pour la classe 32 :

$$\kappa_{ij} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

7.5. Détermination de la structure des tenseurs de rang supérieur

Les programmes de calculs numériques dont les organigrammes sont donnés en annexe E, suivent pratiquement la démarche exposée dans l'exemple précédent. Le premier de ces programmes sert à établir les équations homogènes du type (7.10)–(7.12), ces équations dépendent de la nature du coefficient et des matrices des générateurs de la classe cristalline considérée.

L'examen des résultats obtenus à l'issue de ce premier calcul indique que pour des tenseurs d'ordre 8 par exemple (coefficients élastiques du 4e ordre), on obtient au plus 20 équations concernant au plus 20 inconnues.

Le second programme est destiné à résoudre les systèmes homogènes obtenus dont le rang correspond au nombre de coefficients indépendants. On obtient du même coup les coefficients nuls et les relations de dépendance. La résolution des équations homogènes est simplifiée par le fait que les facteurs des coefficients sont nécessairement des nombres entiers ou des multiples de $\sqrt{3}$ (cf. par exemple les éq. (7.10)–(7.12)) ; ceci est dû à la forme des matrices des générateurs possibles qui sont toujours des rotations ou des rotations-inversions de valeur $2\pi/n$ avec $n = 1, 2, 3, 4, 6$ exclusivement quelle que soit la classe cristalline considérée (cf. annexe D).

Ces programmes ont permis non seulement de retrouver la forme des tenseurs électroélastiques et d'électrostriction mais également de déterminer la structure des coefficients élastiques d'ordre 4 pour les 11 groupes de Laue et le cas isotrope (cf. annexe F) [BRENDÉL, 1979].

Les tableaux de l'annexe A (§5 et §6) montrent que

- parmi les 23 coefficients électroélastiques non nuls, 8 sont indépendants
- parmi les 18 coefficients d'électrostriction non nuls, 8 sont également indépendants.

7.6. Formules de rotation

Parallèlement à l'étude des relations de dépendance entre coefficients matériels, un autre problème se pose fréquemment lorsque l'on veut prévoir les propriétés d'un milieu cristallin en examinant systématiquement toutes les orientations possibles [HAUDEN,1978].

Il faut en effet dans ce cas calculer la valeur de tous les coefficients matériels pour chaque orientation considérée. Habituellement le calcul fait appel à une technique numérique utilisant les relations (7.3), (7.4) et leurs équivalents pour les autres coefficients. Tant que le rang du tenseur reste assez faible, ce procédé donne toute satisfaction, la relation (7.4) par exemple nécessite seulement le calcul de $3^3 = 27$ sommes de 27 termes soit 729 produits de 4 facteurs. Mais lorsqu'on doit faire appel aux tenseurs de rang élevé, le temps de calcul peut atteindre des valeurs prohibitives : les coefficients élastiques du 3e ordre, éléments d'un tenseur de rang 6, qui se transforment suivant la relation :

$$C'_{ijklmn} = P_{ip}P_{jq}P_{kr}P_{ls}P_{mt}P_{nu}C_{pqrst} \quad (7.15)$$

nécessitent $3^6 \times 3^6 \times 7 \approx 3\,720\,000$ produits pour une seule orientation.

Pour diminuer le temps de calcul, on peut faire appel aux formules de rotation sur les coefficients en notation matricielle, c'est-à-dire après avoir effectué les symétries thermodynamiques et regroupé les termes identiques (§7.1). Dans ce cas il ne reste au plus, pour les coefficients élastiques du 3e ordre, que 56 sommes de 56 produits de 3 facteurs c'est-à-dire 9 400 produits soit environ 400 fois moins que dans le calcul initial.

Malheureusement, l'expression des coefficients matriciels après rotation est beaucoup moins simple que la relation de définition (7.3), (7.4) ou (7.15), il faut en effet écrire explicitement tous les coefficients, c'est-à-dire, dans le cas précédent, les 56 coefficients comportant chacun un nombre variable de termes (au maximum 56) compte tenu des simplifications et des mises en facteurs communs. La programmation de ces formules est délicate eu égard au risque important d'erreur de transcription.

L'utilisation des possibilités de traitement des chaînes de caractères par ordinateur a permis l'élaboration d'un programme de calcul réalisant lui-même l'écriture des formules littérales de rotation à partir des relations tensorielles (7.3), (7.4) ou (7.15). Les formules ainsi programmées ne nécessitant plus aucune intervention humaine, le risque d'erreur s'en trouve considérablement réduit.

De manière à assouplir l'utilisation de ces formules, elles ont été écrites pour une rotation autour de chacun des axes OX, OY et OZ. En vertu des conventions d'orientation des cristaux (annexe B), ces trois programmes permettent de couvrir toutes les orientations possibles par référence successive à chacun d'entre eux, en revanche cette méthode ne permet pas l'utilisation des propriétés de symétrie du groupe ponctuel puisqu'après une rotation tous les coefficients peuvent apparaître et figurer dans la rotation suivante.

L'annexe G montre les formules de rotation ainsi obtenues pour quelques coefficients en particulier les coefficients élastiques du 3e ordre et les coefficients électroélastiques.

CHAPITRE 3

VIBRATIONS AUTOUR D'UNE PRÉDEFORMATION STATIQUE

La résolution directe des équations d'équilibre résumées dans le tableau 6.A n'est possible que si les déplacements sont suffisamment petits pour permettre une linéarisation des équations. Dans les autres cas on ne peut approcher la solution qu'en effectuant le développement des équations à des ordres supérieurs dont l'expression est de plus en plus complexe.

On rencontre fréquemment des cas où l'on peut considérer le comportement du milieu comme résultant de la superposition de deux états distincts : une prédéformation statique ou quasistatique (indépendante du temps ou variant lentement) et une vibration au voisinage de cette prédéformation.

La solution complète est obtenue en combinant les solutions obtenues à l'issue de deux études distinctes plus simples :

- une étude statique possible car elle est indépendante du temps
- une étude dynamique possible car elle est d'amplitude faible.

On montre comment les différentes équations peuvent être séparées en parties statique et dynamique à partir de la séparation des variables qui les constituent puis, comme dans le chapitre précédent, on donne les relations permettant de rapporter les équations dynamiques à l'état naturel nécessité par l'utilisation des coefficients matériels de l'énergie.

Dans le cas d'une prédéformation de faible amplitude, les équations dynamiques sont formellement analogues aux équations linéaires des vibrations piézoélectriques dans lesquelles les coefficients matériels linéaires sont perturbés par les coefficients d'ordre supérieur et par les composantes de la prédéformation.

8. DECOMPOSITION DES VARIABLES [TIERSTEN,1973]

La séparation des études statique et dynamique nécessite la définition de trois états distincts résumés dans le tableau 8.A et sur la Fig. 8.1.

Tableau 8.A
Variables dans les différents états

↓Variable	Etat →	Naturel	Prédéformé	Final
Coordonnées		a_i	y_i	x_i
Masse volumique		ρ_0	ρ_1	ρ
Densité de charge de volume		q_0	q_1	q
Densité de charge de surface		σ_0	σ_1	σ
Élément de surface		$\vec{N}dS$	$\vec{v}d\Sigma$	$\vec{n}ds$
Forces de surface		$\vec{N}$ $\mathcal{E}$	$\vec{v}$ $\mathbf{T}$	$\vec{n}$ $\mathbf{T}$
Tenseur des contraintes		$\mathcal{E}_{ij}$	$\mathbf{T}_{ij}$	$\mathbf{T}_{ij}$
Déplacement électrique		$\mathcal{X}_i$	$\mathbf{D}_i$	D_i
Champ électrique		$\mathcal{E}_i$		E_i

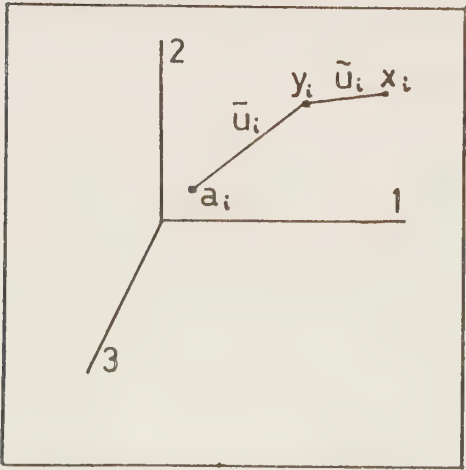


Fig. 8.1

Décomposition du déplacement :
 a_i : coordonnées dans l'état naturel
 y_i : coordonnées dans l'état prédéformé
 x_i : coordonnées dans l'état final
 $\bar{u}_i$: déplacement statique
 u_i : déplacement dynamique

8.1. Décomposition du déplacement

Le déplacement total u_i défini par la relation (5.2) peut être exprimé comme la somme d'un déplacement statique $\bar{u}_i$ et d'un déplacement dynamique $\tilde{u}_i$:

$$u_i = x_i - a_i = \bar{u}_i + \tilde{u}_i \quad (8.1)$$

avec :

$$\bar{u}_i = y_i - a_i \quad (8.2)$$

$$\tilde{u}_i = x_i - y_i \quad (8.3)$$

8.2. Jacobien

Le jacobien total (cf. (1.7), (1.11), (2.8))

$$J = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial a_j}\right) = \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{q_0}{q} \quad (8.4)$$

apparaît comme le produit des jacobiens des déformations statique et dynamique :

$$\bar{J} = \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial a_j}\right) = \frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{q_0}{q_1} \quad (8.5)$$

$$\tilde{J} = \det\left(\frac{\partial x_k}{\partial y_i}\right) = \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{q_1}{q} \quad (8.6)$$

$$J = \bar{J} \cdot \tilde{J} \quad (8.7)$$

8.3. Vitesse

La vitesse définie par la relation (1.3) se réduit à la vitesse du déplacement dynamique :

$$v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{d\tilde{u}_i}{dt} \quad (8.8)$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} \bar{v}_i &= 0 \\ \tilde{v}_i &= v_i \end{aligned} \quad (8.9)$$

8.4. Potentiel

Le potentiel ϕ peut également se décomposer sous la forme :

$$\phi = \overline{\phi}(y_i) + \tilde{\phi}(x_i) \quad (8.10)$$

8.5. Densité de charge

La densité de charge peut être également séparée en parties statique et dynamique. Suivant l'état de référence on aura :

Dans l'état naturel :

$$q_0 = \overline{q}_0 + \tilde{q}_0 \quad (8.11)$$

Dans l'état prédéformé :

$$q_1 = \overline{q}_1 + \tilde{q}_1 \quad (8.12)$$

Dans l'état final :

$$q = \overline{q} + \tilde{q} \quad (8.13)$$

De même la densité de charge de surface sera décomposée dans les différents états :

$$\sigma_0 = \overline{\sigma}_0 + \tilde{\sigma}_0 \quad (8.14)$$

$$\sigma_1 = \overline{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_1 \quad (8.15)$$

$$\sigma = \overline{\sigma} + \tilde{\sigma} \quad (8.16)$$

9. EQUATIONS D'EQUILIBRE ET CONDITIONS AUX LIMITES DANS L'ETAT PREDEFORME

Au lieu d'exprimer directement les équations d'équilibre dans l'état naturel à partir de l'état final comme on l'a fait au §6, il est plus judicieux de les exprimer dans l'état prédéformé, en effet entre l'état final et l'état prédéformé, les déplacements, les potentiels et leurs gradients sont suffisamment petits pour permettre de simplifier les expressions obtenues en effectuant des développements limités au premier ordre.

Si l'on désigne par $\mathbb{T}_{ni}$ et $\mathbb{D}_n$ les composantes du tenseur des contraintes et des déplacements électriques dans l'état prédéformé, les équations d'équilibre dans cet état s'obtiennent par un calcul identique à celui du §6, les différences proviennent seulement des variables utilisées (cf. tableau des équations d'équilibre 6.A).

• Equation du mouvement :

$$\boxed{\rho_1 \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \mathbb{T}_{ni}}{\partial y_n}} \quad (9.1)$$

avec :

$$\mathbb{T}_{ni} = \tilde{\mathbb{J}} \frac{\partial y_n}{\partial x_j} \mathbb{T}_{ji} \quad (9.2)$$

• Théorème de Gauss :

$$\boxed{\frac{\partial \mathbb{D}_n}{\partial y_n} = q_1} \quad (9.3)$$

avec :

$$\mathbb{D}_n = \tilde{\mathbb{J}} \frac{\partial y_n}{\partial x_j} \mathbb{D}_j \quad (9.4)$$

$\tilde{\mathbb{J}}$ étant le jacobien de la déformation dynamique (cf. (8.6)).

9.1. Expression approchée des variables dynamiques

Si les déplacements et les potentiels dynamiques et leurs gradients sont suffisamment petits, on pourra négliger les termes du second ordre du type :

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y_j} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial y_l}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial y_j \partial y_k}, \quad \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y_i} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y_j}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial y_i \partial y_j} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y_i} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y_k}.$$

Les gradients de déformation dynamiques peuvent alors s'exprimer en fonction des gradients de déplacements dynamiques :

$$\frac{\partial y_n}{\partial x_j} \approx \delta_{n,j} - \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial y_j} \quad (9.5)$$

Compte tenu de la relation :

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_k} = \frac{\partial y_i}{\partial a_k} + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial a_k} \quad (9.6)$$

le jacobien dynamique peut s'écrire :

$$\tilde{J} \approx 1 + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y_i} \quad (9.7)$$

9.2. Décomposition de la déformation et du champ électrique

Pour être rotationnellement invariante, l'énergie doit être exprimée à l'aide du champ électrique rapporté à l'état naturel et de la déformation (cf. §5), il s'agit bien entendu de la déformation totale définie par la relation

(5.5). Grâce aux approximations du § précédent, la déformation totale η_{kl} peut être mise sous la forme d'une déformation purement statique $\bar{\eta}_{kl}$ et d'une déformation dynamique $\tilde{\eta}_{kl}$ exprimée en fonction des gradients de déplacements dynamiques :

$$\eta_{kl} = \bar{\eta}_{kl} + \tilde{\eta}_{kl} \quad (9.8)$$

avec :

$$\bar{\eta}_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y_i}{\partial a_k} \frac{\partial y_i}{\partial a_l} - \delta_{kl} \right) \quad (9.9)$$

$$\tilde{\eta}_{kl} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial y_i}{\partial a_k} \frac{\partial y_j}{\partial a_l} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y_i} \right) \quad (9.10)$$

De même, le champ électrique exprimé dans l'état final par l'équation (3.2) peut se mettre sous la forme :

$$E_i = \bar{E}_i + \tilde{E}_i \quad (9.11)$$

avec :

$$\bar{E}_i = \frac{-\partial \bar{\phi}}{\partial y_i} \quad (9.12)$$

$$\tilde{E}_i = -\bar{E}_j \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y_i} - \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y_i} \quad (9.13)$$

Rapporté à l'état naturel, le champ électrique défini par (5.1) se décompose de la façon suivante :

$$\tilde{\mathcal{E}}_k = \bar{\mathcal{E}}_k + \tilde{\mathcal{E}}_k \quad (9.14)$$

avec :

$$\bar{\mathcal{E}}_k = \bar{E}_i \frac{\partial y_i}{\partial a_k} = - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial a_k} \quad (9.15)$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_k = \frac{-\partial \tilde{\phi}}{\partial a_k} \quad (9.16)$$

9.3. Décomposition de l'énergie

La relation (5.18) exprime le potentiel de Gibbs à l'aide des variables η_{ij} et $\mathcal{E}_i$, la décomposition de ces variables en parties statiques et dynamiques (Eqs. (9.8) et (9.14)) et l'ordre de grandeur de la vibration par rapport à la prédéformation permet d'effectuer un développement en série de Taylor au 1er ordre de l'énergie au voisinage de l'état prédéformé et de considérer cette énergie comme la somme d'une partie statique et d'une partie dynamique

$$\chi(\eta_{ij}, \mathcal{E}_i) = \bar{\chi} + \tilde{\chi} \quad (9.17)$$

$$\bar{\chi} = \chi(\bar{\eta}_{ij}, \bar{\mathcal{E}}_i) \quad (9.18)$$

$$\tilde{\chi} = \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \bar{\eta}_{ij}} \tilde{\eta}_{ij} + \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \bar{\mathcal{E}}_i} \tilde{\mathcal{E}}_i \quad (9.19)$$

9.4. Décomposition des équations constitutives

Dans ce paragraphe et dans les suivants, les différentes grandeurs seront calculées à l'aide des approximations définies précédemment et le signe = sera utilisé à la place du signe $\approx$.

Partant de la relation (9.2) donnant la contrainte $\mathbf{T}_{ni}$ en fonction de $\mathbf{T}_{ji}$, en remplaçant celle-ci par sa valeur (5.12)–(5.14) et en utilisant les décompositions en parties statiques et dynamiques des différents termes, on peut décomposer cette contrainte $\mathbf{T}_{ni}$ elle-même en parties statique et dynamique :

$$\mathbf{T}_{ni} \approx \bar{\mathbf{T}}_{ni} + \tilde{\mathbf{T}}_{ni} \quad (9.20)$$

De même, à partir de l'expression (9.4) donnant $\mathbf{D}_n$ en fonction de $\mathbf{D}_n$ exprimé par les relations (3.4) et (5.9) et en utilisant les mêmes décompositions, le déplacement électrique $\mathbf{D}_n$ peut s'écrire :

$$\mathbf{D}_n = \bar{\mathbf{D}}_n + \tilde{\mathbf{D}}_n \quad (9.21)$$

• Parties statiques :

On obtient pour $\bar{\mathbf{T}}_{ni}$ et $\bar{\mathbf{D}}_n$ les expressions suivantes :

$$\bar{\mathbf{T}}_{ni} = \rho_1 \frac{\partial y_n}{\partial a_\ell} \frac{\partial y_i}{\partial a_k} \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \bar{\eta}_{k\ell}} + \epsilon_0 (\bar{E}_n \bar{E}_i - \frac{1}{2} \bar{E}_k \bar{E}_k \delta_{ni}) \quad (9.22)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_n = \epsilon_0 \bar{E}_n - \rho_1 \frac{\partial y_n}{\partial a_k} \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \bar{e}_k} \quad (9.23)$$

Si l'on compare l'expression de $\mathbf{T}_{ni}$ et de $\mathbf{D}_n$ avec celle de $\mathbf{T}_{ji}$ et de $\mathbf{D}_i$ (Eqs. (5.12)–(5.14) et (3.4), (5.9)), on s'aperçoit qu'elles sont formellement identiques : la variable x (état final) est remplacée par y (état prédéformé) et les autres variables par leur partie statique. Les parties statiques de la contrainte $\mathbf{T}_{ni}$ et du déplacement $\mathbf{D}_n$ ne sont autres que la précontrainte $\bar{\mathbf{T}}_{ni}$ et le déplacement $\bar{\mathbf{D}}_n$ exprimés dans l'état prédéformé.

$$\bar{\mathbf{T}}_{ni} = \bar{\mathbf{T}}_{ni} = \bar{\mathbf{T}}_{ni}^{MS} + \bar{\mathbf{T}}_{ni}^{ES} \quad (9.24)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_n = \bar{\mathbf{D}}_n = \epsilon_0 \bar{E}_n + \bar{\mathbf{P}}_n \quad (9.25)$$

• Parties dynamiques :

Le développement limité au premier ordre des grandeurs dynamiques permet d'exprimer la contrainte et le déplacement électriques dynamiques $\tilde{T}_{ni}$ et $\tilde{D}_n$ sous forme d'une fonction linéaire des gradients de déplacements et de potentiel dynamiques rapportés à l'état prédéformé :

$$\tilde{T}_{ni} = B_{nijm} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y_m} + B_{min} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y_m} \quad (9.26)$$

$$\tilde{D}_n = B_{njm} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y_m} + B_{nm} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y_m} \quad (9.27)$$

De même que les contraintes statiques $\bar{T}_{ni}$ et $\bar{T}_{ni}$ avaient une double origine mécanique et électrique, les tenseurs B_{nijm} et B_{min} sont la somme de deux termes :

$$B_{nijm} = B_{nijm}^M + B_{nijm}^E \quad (9.28)$$

$$B_{njm} = B_{njm}^M + B_{njm}^E \quad (9.29)$$

avec :

$$B_{nijm}^M = \bar{T}_{nm}^{MS} \delta_{ij} + \rho_1 \frac{\partial y_n}{\partial a_l} \frac{\partial y_i}{\partial a_k} \frac{\partial y_j}{\partial a_p} \frac{\partial y_m}{\partial a_q} \frac{\partial^2 \bar{\chi}}{\partial \bar{\eta}_{kl} \partial \bar{\eta}_{pq}} \quad (9.30)$$

$$B_{nijm}^E = \bar{T}_{ni}^{ES} \delta_{jm} - \bar{T}_{mi}^{ES} \delta_{jn} + \epsilon_0 \bar{E}_j B_{min}^E \quad (9.31)$$

$$B_{njm}^M = -\rho_1 \frac{\partial y_n}{\partial a_p} \frac{\partial y_j}{\partial a_k} \frac{\partial y_m}{\partial a_l} \frac{\partial^2 \bar{\chi}}{\partial \bar{\eta}_{kl} \partial \bar{\epsilon}_p} \quad (9.32)$$

$$B_{njm}^E = \epsilon_0 (\bar{E}_n \delta_{jm} - \bar{E}_j \delta_{nm} - \bar{E}_m \delta_{jn}) \quad (9.33)$$

$$B_{nm} = \rho_1 \frac{\partial y_n}{\partial a_k} \frac{\partial y_m}{\partial a_p} \frac{\partial^2 \bar{\chi}}{\partial \bar{\epsilon}_p \partial \bar{\epsilon}_k} - \epsilon_0 \delta_{nm} \quad (9.34)$$

Ainsi que le montrent les relations (9.30)–(9.34), les tenseurs du développement de la contrainte et du déplacement électrique dynamiques s'expriment uniquement en fonction des caractéristiques statiques de la prédéformation.

9.5. Décomposition des équations d'équilibre

La séparation de la contrainte $\mathbf{T}_{ni}$ (Eq. (9.20)), du déplacement électrique $\mathbf{D}_n$ (Eq. (9.21)) et de la densité de charge q_1 (Eq. (8.12)) permet de séparer les parties statiques et dynamiques des équations d'équilibre (9.1) et (9.3) :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{T}}_{ni}}{\partial y_n} = 0 \tag{9.35}$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{D}}_n}{\partial y_n} = \bar{q}_1 \tag{9.36}$$

$$\rho_1 \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}_{ni}}{\partial y_n} \tag{9.37}$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}_n}{\partial y_n} = \tilde{q}_1 \tag{9.38}$$

9.6. Décomposition des conditions aux limites

Aux trois états définis au début du §8 correspondent les trois possibilités représentées sur la Fig. 9.1 pour la surface de séparation.

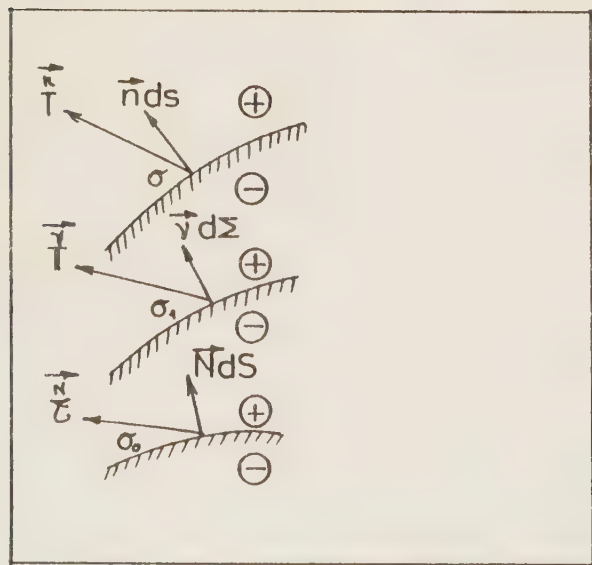


Fig. 9.1
 La surface de séparation ($\vec{N}dS, \vec{\mathcal{C}}, \sigma_0$) dans l'état naturel devient $(\vec{v}d\Sigma, \vec{T}, \sigma_1)$ dans l'état prédéformé et $(\vec{n}ds, \vec{T}, \sigma)$ dans l'état final.

La détermination des conditions aux limites dans l'état prédéformé est formellement analogue à celle du §6.5 entre état final et état naturel :

l'élément de surface $\vec{n}ds$, les forces de surface $\vec{T}$ et la densité de charge de surface σ dans l'état final correspondent respectivement à $\vec{v}d\Sigma, \vec{T}$ et σ_1 dans l'état prédéformé.

Les conditions aux limites rapportées à l'état prédéformé s'écrivent :

$$\boxed{(\mathbf{T}_{ni}^+ - \mathbf{T}_{ni}^-) \mathbf{v}_n = \mathbf{T}_i^v} \quad (9.39)$$

$$\boxed{(\mathbf{D}_n^+ - \mathbf{D}_n^-) \mathbf{v}_n = \sigma_1} \quad (9.40)$$

$$\boxed{\phi^+ - \phi^- = 0} \quad (9.41)$$

Les composantes $\mathbf{T}_{ni}^+$, $\mathbf{T}_{ni}^-$ et $\mathbf{D}_n^+$, $\mathbf{D}_n^-$ sont données par les relations (9.2) et (9.4) et les éléments de surface finale et prédéformée se correspondent par la formule de NANSON :

$$n_i ds = \tilde{\mathcal{J}} \frac{\partial y_n}{\partial x_i} v_n d\Sigma \quad (9.42)$$

Les composantes des forces de surface $\vec{\mathbf{T}}^{\vec{n}}$ et $\vec{\mathbf{T}}^{\vec{v}}$ sont liées par la relation :

$$\mathbf{T}_i^v d\Sigma = \mathbf{T}_i^n ds \quad (9.43)$$

et les densités de charges de surface σ et σ_1 par :

$$\sigma_1 d\Sigma = \sigma ds \quad (9.44)$$

Les décompositions (9.20) des contraintes mécaniques et (9.21) du déplacement électrique permettent la séparation des conditions aux limites en conditions statiques et dynamiques :

$$(\bar{\mathbf{T}}_{ni}^+ - \bar{\mathbf{T}}_{ni}^-) \mathbf{v}_n = \bar{\mathbf{T}}_i^v \quad (9.45)$$

$$(\bar{\mathbf{D}}_n^+ - \bar{\mathbf{D}}_n^-) \mathbf{v}_n = \bar{\sigma}_1 \quad (9.46)$$

$$(\tilde{\mathbf{T}}_{ni}^+ - \tilde{\mathbf{T}}_{ni}^-) \mathbf{v}_n = \tilde{\mathbf{T}}_i^v \quad (9.47)$$

$$(\tilde{\mathbf{D}}_n^+ - \tilde{\mathbf{D}}_n^-) \mathbf{v}_n = \tilde{\sigma}_1 \quad (9.48)$$

De même on peut effectuer la séparation des conditions aux limites sur le potentiel grâce à la relation (8.10).

$$\bar{\phi}^+ - \bar{\phi}^- = 0 \quad (9.49)$$

$$\tilde{\phi}^+ - \tilde{\phi}^- = 0 \quad (9.50)$$

10. EQUATIONS D'EQUILIBRE ET CONDITIONS AUX LIMITES RAPPORTEES A L'ETAT NATUREL [TIERSTEN, 1978]

Un raisonnement analogue à celui du §6 conduit à exprimer les équations d'équilibre en coordonnées matérielles puisque l'énergie nécessite cette représentation pour rester rotationnellement invariante.

La démarche suivie pour effectuer cette transformation est formellement la même que celle du §6.

10.1. Forme des équations d'équilibre dans l'état naturel

L'équation du mouvement exprimée dans l'état prédéformé (9.1) devient en représentation matérielle :

$$\boxed{\rho_0 \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \tau_{ki}}{\partial a_k}} \quad (10.1)$$

avec :

$$\tau_{ki} = \bar{J} \frac{\partial a_k}{\partial y_n} T_{ni} \quad (10.2)$$

De même, le théorème de Gauss (9.3) devient :

$$\boxed{\frac{\partial \varphi_k}{\partial a_k} = q_0} \quad (10.3)$$

avec :

$$\varphi_k = \bar{J} \frac{\partial a_k}{\partial y_n} D_n \quad (10.4)$$

$\bar{J}$ étant le jacobien de la déformation statique défini par (8.5).

10.2. Décomposition des équations constitutives

La décomposition (9.20) de la contrainte T_{ni} et (9.21) du déplacement électrique D_n permet de décomposer τ_{ki} et φ_k en parties statique et dynamique grâce aux relations (10.2) et (10.4) :

$$\tau_{ki} = \bar{\epsilon}_{ki} + \tilde{\epsilon}_{ki} \quad (10.5)$$

$$\varphi_k = \bar{\varphi}_k + \tilde{\varphi}_k \quad (10.6)$$

avec évidemment pour les parties statiques :

$$\bar{\mathcal{E}}_{ki} = \bar{J} \frac{\partial a_k}{\partial y_n} \bar{T}_{ni} \quad (10.7)$$

$$\bar{\mathcal{D}}_k = \bar{J} \frac{\partial a_k}{\partial y_n} \bar{D}_n \quad (10.8)$$

$\bar{T}_{ni}$ et $\bar{D}_n$ étant données par les relations (9.22) et (9.23).

Les parties dynamiques s'expriment sous forme de développements linéaires des gradients de déplacements et de potentiel dynamiques rapportés à l'état naturel :

$$\tilde{\mathcal{E}}_{ki} = A_{kijl} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial a_l} + A_{lik} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial a_l} \quad (10.9)$$

$$\tilde{\mathcal{D}}_k = A_{kjl} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial a_l} + A_{kl} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial a_l} \quad (10.10)$$

Les tenseurs A sont donnés par les relations :

$$A_{kijl} = \bar{J} \frac{\partial a_k}{\partial y_n} \frac{\partial a_l}{\partial y_m} B_{nijm} \quad (10.11)$$

$$A_{kjl} = \bar{J} \frac{\partial a_k}{\partial y_n} \frac{\partial a_l}{\partial y_m} B_{n j m} \quad (10.12)$$

$$A_{kl} = \bar{J} \frac{\partial a_k}{\partial y_n} \frac{\partial a_l}{\partial y_m} B_{nm} \quad (10.13)$$

Si l'on utilise les définitions (9.28)–(9.34) des tenseurs B, on obtient les relations suivantes⁽¹⁾ :

$$A_{kijl} = A_{kijl}^M + A_{kijl}^E \quad (10.14)$$

$$A_{kjl} = A_{kjl}^M + A_{kjl}^E \quad (10.15)$$

(1) [TIERSTEN, 1978] commet une erreur de signe et omet deux termes dans ces coefficients.

$$A_{kijl}^M = \frac{\partial \rho_0 \bar{\chi}}{\partial \bar{\eta}_{kl}} \delta_{ij} + \frac{\partial y_i}{\partial a_p} \frac{\partial y_j}{\partial a_q} \frac{\partial^2 \rho_0 \bar{\chi}}{\partial \bar{\eta}_{pk} \partial \bar{\eta}_{ql}} \quad (10.16)$$

$$A_{kijl}^E = \bar{J} \left(\frac{\partial a_k}{\partial y_n} \frac{\partial a_l}{\partial y_j} - \frac{\partial a_k}{\partial y_j} \frac{\partial a_l}{\partial y_n} \right) \bar{T}_{ni}^{ES} + \bar{E}_j A_{lik}^E \quad (10.17)$$

$$A_{kjl}^M = - \frac{\partial y_j}{\partial a_p} \frac{\partial \rho_0 \bar{\chi}}{\partial \bar{\eta}_{pl} \partial \bar{\epsilon}_k} \quad (10.18)$$

$$A_{kjl}^E = \epsilon_0 \bar{J} \left(\left(\frac{\partial a_k}{\partial y_n} \frac{\partial a_l}{\partial y_j} - \frac{\partial a_k}{\partial y_j} \frac{\partial a_l}{\partial y_n} \right) \bar{E}_n - \frac{\partial a_k}{\partial y_n} \frac{\partial a_l}{\partial y_n} \bar{E}_j \right) \quad (10.19)$$

$$A_{kl} = \frac{\partial^2 \rho_0 \bar{\chi}}{\partial \bar{\epsilon}_k \partial \bar{\epsilon}_l} - \epsilon_0 \bar{J} \frac{\partial a_k}{\partial y_n} \frac{\partial a_l}{\partial y_n} \quad (10.20)$$

10.3. Décomposition des équations d'équilibre :

La séparation des équations d'équilibre (10.1) et (10.3) en parties statique et dynamique s'effectue comme au §9.5 :

$\frac{\partial \bar{\mathcal{E}}_{ki}}{\partial a_k} = 0$	(10.21)
--	---------

$\frac{\partial \bar{\mathcal{Q}}_k}{\partial a_k} = \bar{q}_0$	(10.22)
---	---------

$\rho_0 \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_{ki}}{\partial a_k}$	(10.23)
---	---------

$\frac{\partial \tilde{\mathcal{Q}}_k}{\partial a_k} = \tilde{q}_0$	(10.24)
---	---------

10.4. Décomposition des conditions aux limites

Le passage entre l'état prédéformé et l'état naturel se fait de la même façon qu'aux §6.5 et §9.6 (voir Fig. 9.1 pour les notations utilisées), on obtient les conditions aux limites suivantes :

$$\boxed{(\epsilon_{ki}^+ - \epsilon_{ki}^-) N_k = \overset{N}{\epsilon}_i} \quad (10.25)$$

$$\boxed{(\chi_k^+ - \chi_k^-) N_k = \sigma_0} \quad (10.26)$$

$$\boxed{\phi^+ - \phi^- = 0} \quad (10.27)$$

avec :

$$v_n d\Sigma = \overline{J} \frac{\partial a_k}{\partial y_n} N_k d\Sigma \quad (10.28)$$

et :

$$\overset{N}{\epsilon}_i d\Sigma = \overset{v}{T}_i d\Sigma \quad (10.29)$$

$$\sigma_0 d\Sigma = \sigma_1 d\Sigma \quad (10.30)$$

La décomposition de ces équations conduit à :

$$(\overline{\epsilon}_{ki}^+ - \overline{\epsilon}_{ki}^-) N_k = \overline{\epsilon}_i \quad (10.31)$$

$$(\overline{\chi}_k^+ - \overline{\chi}_k^-) N_k = \overline{\sigma}_0 \quad (10.32)$$

$$(\tilde{\epsilon}_{ki}^+ - \tilde{\epsilon}_{ki}^-) N_k = \tilde{\epsilon}_i \quad (10.33)$$

$$(\tilde{\chi}_k^+ - \tilde{\chi}_k^-) N_k = \tilde{\sigma}_0 \quad (10.34)$$

$$\overline{\phi}^+ - \overline{\phi}^- = 0 \quad (10.35)$$

$$\tilde{\phi}^+ - \tilde{\phi}^- = 0 \quad (10.36)$$

11. EQUATIONS CONSTITUTIVES DYNAMIQUES EXPRIMEES A L'AIDE DES COEFFICIENTS MATERIELS

Dans le cas fréquent où la prédéformation est de faible amplitude, il est possible d'effectuer sur les différentes variables statiques des approximations analogues à celles du §9.1 en négligeant les termes du second ordre du type :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial a_j} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial a_l}, \quad \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial a_j \partial a_k}, \quad \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial a_i} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial a_j}, \quad \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial a_i \partial a_j} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial a_i} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial a_k}$$

Ces approximations permettent d'exprimer les coefficients des équations constitutives dynamiques, c'est-à-dire les tenseurs A des équations (10.9) et (10.10), comme des fonctions linéaires des gradients de déplacements et de potentiel statiques $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial a_j}$ et $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial a_j}$.

11.1. Expressions approchées des variables statiques

La relation (8.2) permet d'exprimer les gradients de déformation statique :

$$\frac{\partial y_i}{\partial a_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial a_j} \quad (11.1)$$

d'où :

$$\frac{\partial a_j}{\partial y_i} \approx \delta_{ij} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial a_i} \quad (11.2)$$

De même la déformation (9.9) devient :

$$\bar{\eta}_{kl} \approx \bar{S}_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial a_l} + \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial a_k} \right) \quad (11.3)$$

et le jacobien (8.5) :

$$\bar{J} \approx 1 + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial a_i} \quad (11.4)$$

Enfin, le champ électrique dans l'état prédéformé est approximativement égal au champ électrique dans l'état naturel (cf. (9.12) et (9.15)).

$$\bar{E}_i \approx \bar{\mathcal{E}}_i = - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial a_i} \quad (11.5)$$

11.2. Expressions linéaires des coefficients des équations constitutives :

Les approximations définies dans le paragraphe précédent permettent d'obtenir une forme relativement simple pour les dérivées successives de l'énergie statique $\bar{\chi}(\bar{\eta}_{ij}, \bar{\varepsilon}_i)$ cf. (5.18) et (9.18). Le développement des tenseurs A définis par les relations (10.14)–(10.20) en fonction des gradients de déplacements et de potentiel statiques, compte tenu des propriétés de symétrie des coefficients matériels de l'énergie (cf. §7), montrent que ces tenseurs A peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$A_{kijl} = C_{kijl} + \hat{C}_{kijl} \quad (11.6)$$

$$A_{k,jl} = e_{k,jl} + \hat{e}_{k,jl} \quad (11.7)$$

$$A_{kl} = -e_{kl} - \hat{e}_{kl} \quad (11.8)$$

avec :

$$\hat{C}_{kijl} = (C_{klmn}\delta_{ij} + C_{kinl}\delta_{jm} + C_{knjl}\delta_{im} + C_{kijl}mn) \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial a_n} + (e_{n,kl}\delta_{ij} + e_{n,kijl}) \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial a_n} \quad (11.9)$$

$$\hat{e}_{k,jl} = (e_{k,nl}\delta_{jm} + e_{k,jl}mn) \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial a_n} + [\varepsilon_o(\delta_{kj}\delta_{ln} - \delta_{jl}\delta_{kn} + \delta_{kl}\delta_{jn}) - e_{kn,jl}] \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial a_n} \quad (11.10)$$

$$\hat{e}_{kl} = [\varepsilon_o(\delta_{kl}\delta_{mn} - \delta_{kn}\delta_{lm} - \delta_{ln}\delta_{km}) + \varepsilon_{kl,mn}] \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial a_n} - \kappa_{kl,n} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial a_n} \quad (11.11)$$

Si l'on considère les équations constitutives (10.9) et (10.10) on s'aperçoit qu'elles sont formellement analogues à celles que l'on obtient lors de l'étude linéaire des phénomènes piézoélectriques [TIERSTEN, 1969, ch.5]. Les coefficients du développement linéaire de l'énergie (C_{ijkl} , $e_{k,ij}$ et ε_{ik}) sont simplement remplacés par des tenseurs A qui apparaissent comme la somme du coefficient linéaire correspondant et d'un terme circonflexe qui dépend des coefficients non linéaires du développement de l'énergie et des gradients de déplacements et de potentiel statiques consécutifs à la prédéformation. Ces termes disparaissent si la prédéformation est nulle et ne constituent qu'une petite modification des coefficients linéaires lorsque la prédéformation est de faible amplitude. Cette dernière remarque conduit à rechercher la solution du problème non linéaire en effectuant un calcul de perturbation sur la solution des équations linéaires.

11.3. Remarque sur les coefficients des équations constitutives

La forme des équations constitutives (10.9) et (10.10) montre que tout se passe comme si l'on recherchait la solution des équations piézoélectriques linéaires dans un "milieu équivalent" caractérisé par les coefficients (11.6)–(11.8) appelés coefficients effectifs. Les relations (11.9)–(11.11) montrent que les indices des coefficients circonflexes n'obéissent pas aux mêmes règles de symétrie que les indices des coefficients linéaires (cf. §7). Le "milieu équivalent" est généralement caractérisé par un degré de symétrie cristallographique plus faible que celui du milieu initial : la prédéformation abaisse la symétrie du milieu.

La prochaine partie de ce travail portera sur la détermination des coefficients matériels électroélastiques $e_{n,ijkl}$ (cf. (5.18)) à partir de l'effet électroélastique. Des coefficients phénoménologiques destinés à expliquer cet effet ont déjà été calculés [HRUSKA, 1971a], [KUSTERS, 1970], [REIDER, 1982], [CHIZHIKOV, 1982], [ZELENKA, 1982] à partir de la solution linéaire des équations piézoélectriques. Ces coefficients δ_{ijkln} ont été définis comme les variations des constantes élastiques sous l'effet d'un champ électrique continu mais ces coefficients sont en fait les variations des coefficients élastiques effectifs A_{ikjl} et non les variations des coefficients élastiques matériels C_{ijkl} qui eux ne dépendent pas du champ. Avec les notations du §11.2, on peut écrire :

$$\delta_{ijkln} = \frac{\partial A_{ijkl}}{\partial E_n} = \frac{\partial \hat{C}_{ijkl}}{\partial E_n} \quad (11.12)$$

La forme du coefficient circonflexe (11.9) montre que les δ_{ijkln} ne présentent ni les symétries thermodynamiques ni les symétries cristallines (comme cela sera illustré au §16.4) or c'est sur cette hypothèse que Hruska, Kusters et Reider fondent le calcul de leurs constantes phénoménologiques dont l'application reste par conséquent limitée au seul modèle utilisé pour leur détermination.

Ces coefficients phénoménologiques, calculés de manière analogue aux coefficients de température des constantes élastiques [BECHMAN, 1962], ignorent les effets non linéaires comme l'a souligné Tiersten qui a recalculé les coefficients de température des constantes matérielles de façon correcte [TIERSTEN, 1979].

Tableau 11.A : Equations d'équilibre dans les trois états

Equation	Etat final	Eq.	Passage	Eq.	Séparation	Eq.	Etat prédéformé	Eq.	Passage	Eq.	Etat naturel	Eq.
Mouvement	$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}$	3.13 6.1	$\tau_{ni} = \int \frac{\partial v_n}{\partial x_j} \tau_{ji} d_j$	9.2	$\tau_{ni} = \tau_{ni} + \tilde{\tau}_{ni}$	9.20	$\frac{\partial \tau_{ni}}{\partial y_n} = 0$ $\rho_1 \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \tilde{\tau}_{ni}}{\partial y_n}$	9.35 9.37	$\tau_{ni} = \int \frac{\partial v_i}{\partial y_n} \tau_{ni} d_n$	10.2	$\frac{\partial \tilde{\tau}_{ki}}{\partial a_k} = 0$ $\rho_0 \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \tilde{\tau}_{ki}}{\partial a_k}$	10.21 10.23
Théorème de Gauss	$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = q$	3.3	$D_n = \int \frac{\partial y_n}{\partial x_j} D_j d_j$	9.4	$D_n = \tilde{D}_n + \tilde{D}_n$ $q_1 = \tilde{q}_1 + \tilde{q}_1$	9.21 8.12	$\frac{\partial \tilde{D}_n}{\partial y_n} = \tilde{q}_1$ $\frac{\partial \tilde{D}_n}{\partial y_n} = \tilde{q}_1$	9.36 9.38	$\tilde{D}_k = \int \frac{\partial v_k}{\partial y_n} D_n d_n$	10.4	$\frac{\partial \tilde{D}_k}{\partial a_k} = \tilde{q}_0$	10.22 10.24
Champ - potentiel	$E_i = - \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$	3.2							$E_k = \epsilon_1 \frac{\partial x_1}{\partial a_k}$	5.1 6.8	$\tilde{E}_k = - \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial a_k}$ $\tilde{E}_k = - \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial a_k}$	9.15 9.16

Tableau 11.B : Conditions aux limites dans les trois états

Conditions	Etat final	Eq.	Passage	Eq.	Séparation	Eq.	Etat prédéformé	Eq.	Passage	Eq.	Etat naturel	Eq.
Mécaniques	$(\tau_{ji}^+ - \tau_{ji}^-) n_j = \tau_{i1}$	3.17	$\tau_{i1} d\Omega = \int \tau_{i1} ds$ $n_1 ds = \int \frac{\partial y_n}{\partial x_i} v_n d\Omega$	7.43 9.42	$\tau_{i1} = \tilde{\tau}_{i1} + \tilde{\tau}_{i1}$		$(\tilde{\tau}_{n1} - \tilde{\tau}_{n1}^-) v_n = \tilde{\tau}_{i1}$ $(\tilde{\tau}_{n1} - \tilde{\tau}_{n1}^-) v_n = \tilde{\tau}_{i1}$	7.43 9.47	$\tau_{i1} d\Omega = \int \tau_{i1} ds$ $v_n d\Omega = \int \frac{\partial a_k}{\partial y_n} \tau_{ki} d\Omega$	10.2	$\tilde{\tau}_{i1} - \tilde{\tau}_{i1}^- n_k = \tilde{\tau}_{i1}$ $\tilde{\tau}_{ki} - \tilde{\tau}_{ki}^- n_k = \tilde{\tau}_{i1}$	10.21 10.23
Electriques	$(D_i^+ - D_i^-) n_i = \sigma$	3.19	$\tau_1 d\Omega = \sigma ds$	7.44	$\sigma_1 = \tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_1$	8.15	$(\tilde{D}_n^+ - \tilde{D}_n^-) v_n = \tilde{\sigma}_1$ $(\tilde{D}_n^+ - \tilde{D}_n^-) v_n = \tilde{\sigma}_1$	9.46 9.48	$\sigma_1 d\Omega = \int \sigma ds$	10.20	$\tilde{\sigma}_k - \tilde{\sigma}_k^- n_k = \tilde{\sigma}_0$ $\tilde{\sigma}_k - \tilde{\sigma}_k^- n_k = \tilde{\sigma}_0$	10.22 10.24
Potentiel	$\phi^+ - \phi^- = 0$	3.19			$\phi = \tilde{\phi}(y_1) + \tilde{\phi}(x_1)$	8.10					$\tilde{\phi}^+ - \tilde{\phi}^- = 0$ $\tilde{\phi}^+ - \tilde{\phi}^- = 0$	9.15 9.16

Tableau 11.C
Equations constitutives et relations de définitions dans les trois états

	Séparation	Etat prédéformé	Etat naturel (petites vibrations)	Eq.	Etat naturel (petites prédéformations)	Eq.
Déformation	$\eta_{k\ell} = \bar{\eta}_{k\ell} + \tilde{\eta}_{k\ell}$		$\bar{\eta}_{k\ell} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y_i}{\partial a_k} \frac{\partial y_i}{\partial a_\ell} - \delta_{k\ell} \right)$	9.9	$\bar{\eta}_{k\ell} \approx \bar{S}_{k\ell} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial a_\ell} + \frac{\partial \bar{u}_\ell}{\partial a_k} \right)$	11.3
			$\tilde{\eta}_{k\ell} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial y_i}{\partial a_k} \frac{\partial y_j}{\partial a_\ell} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y_i} \right)$	9.10		
Contrainte	$T_{n1} = \bar{T}_{n1} + \tilde{T}_{n1}$ $\mathcal{E}_{k1} = \bar{\mathcal{E}}_{k1} + \tilde{\mathcal{E}}_{k1}$	$\bar{T}_{n1} = \bar{T}_{n1} = \bar{T}_{n1}^MS + \bar{T}_{n1}^ES$		10.7		
		$\tilde{T}_{n1} = B_{n1,jm} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y_m} + B_{m1n} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y_m}$	$\tilde{\mathcal{E}}_{ki} = A_{kij\ell} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial a_\ell} + A_{lik} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial a_\ell}$	10.9	$A_{k1j\ell} = \bar{C}_{k1j\ell} + \hat{C}_{k1j\ell}$ $A_{kj\ell} = e_{k,j\ell} + \hat{e}_{k,j\ell}$	11.6 11.7
Déplacement électrique	$D_n = \bar{D}_n + \tilde{D}_n$ $\mathcal{A}_k = \bar{\mathcal{A}}_k + \tilde{\mathcal{A}}_k$	$\bar{D}_n = \bar{D}_n = \epsilon_0 \bar{E}_n + \bar{P}_n$		10.8		
		$\tilde{D}_n = B_{n,jm} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y_m} + B_{nm} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y_m}$	$\tilde{\mathcal{A}}_k = A_{k,j\ell} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial a_\ell} + A_{k\ell} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial a_\ell}$	10.10	$A_{k\ell} = -e_{k\ell} - \hat{e}_{k\ell}$	11.8
Energie	$\chi = \bar{\chi} + \tilde{\chi}$		$\bar{\chi} = \chi(\bar{\eta}_{ij}, \bar{\mathcal{E}}_i)$	9.18		
			$\tilde{\chi} = \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \bar{\eta}_{ij}} \tilde{\eta}_{ij} + \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \bar{\mathcal{E}}_i} \tilde{\mathcal{E}}_i$	9.19		

CHAPITRE 4

SOLUTIONS STATIQUE ET DYNAMIQUE, METHODE DE PERTURBATION

Ce chapitre est consacré à la résolution des équations établies dans le chapitre précédent : tout d'abord le calcul de la prédéformation statique dans le cas d'un champ électrique normal ou parallèle à la plaque puis un rappel de la solution linéaire de l'équation dynamique et enfin l'exposé de la méthode générale de perturbation permettant de calculer la variation de fréquence d'un résonateur prédéformé par un champ électrique statique.

La solution dynamique et la méthode de perturbation sont connues et les composantes de la prédéformation statique sous l'effet d'un champ électrique continu sont obtenues par une méthode classique.

12. PREDEFORMATION D'UNE PLAQUE MINCE, SOLUTION LINEAIRE [TIERSTEN, 1969]

12.1. Hypothèses

Pour étudier la prédéformation due à l'application d'un champ électrique statique sur un résonateur, celui-ci sera assimilé à une plaque mince dont les dimensions latérales sont suffisamment grandes devant l'épaisseur $2h$ pour qu'on puisse l'assimiler à un milieu unidimensionnel.

L'orientation de cette plaque est définie conformément à la norme IEEE 176 (cf. annexe B) résumée sur la Fig. 12.1. La normale $\vec{n}$ à la plaque est dirigée suivant l'axe a'_1 d'un repère $\{a'_1, a'_2, a'_3\}$ lié à la plaque et obtenu à partir du repère cristallin $\{a_1, a_2, a_3\}$ (cf. Fig. 12.2) grâce à la matrice de passage p_{ij} définie par (cf. (7.2)) :

$$a'_i = p_{ij} a_j \quad (12.1)$$

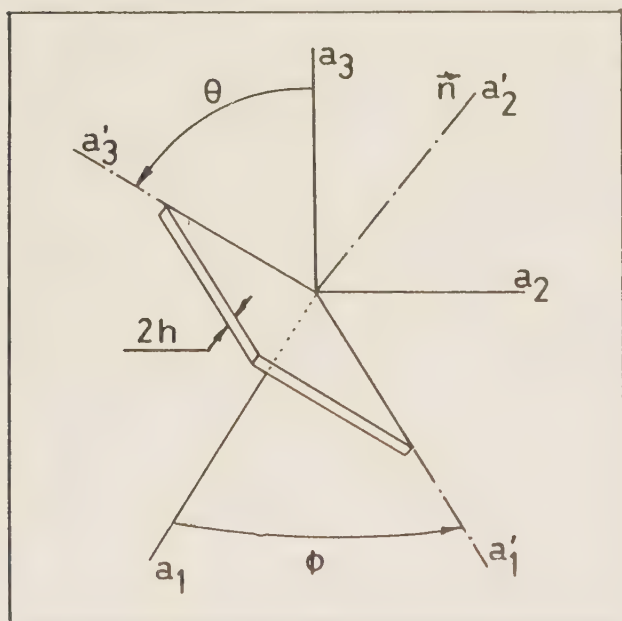


Fig. 12.1

Orientation d'une plaque mince d'épaisseur $2h$ selon la norme IEEE176, la normale à la plaque est dirigée suivant l'axe a'_1 .

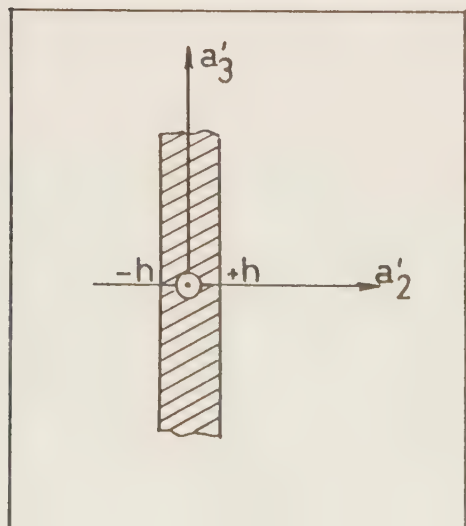


Fig. 12.2

Système d'axes liés à la plaque.

12.2. Approximation linéaire

Dans le cadre de l'étude linéaire on ne distingue plus les variables matérielles et spatiales, ce qui se traduit par les approximations suivantes :

$$\frac{\partial a_k}{\partial y_j} \approx \delta_{kj} \quad (12.2)$$

$$\bar{J} \approx 1 \quad (12.3)$$

D'où l'on déduit (cf. tableaux (6.A)-(6.C)) :

$$\bar{\mathcal{E}}_{ij} \approx \bar{T}_{ij} \quad (12.4)$$

$$\bar{\mathcal{D}}_j \approx \bar{D}_j \quad (12.5)$$

$$\bar{\mathcal{E}}_i \approx \bar{E}_i \approx - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial a_i} \quad (12.6)$$

$$\bar{\eta}_{ij} \approx \bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial a_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial a_i} \right) \quad (12.7)$$

L'énergie (Eqs. (5.18) et (9.18)) se réduit à la forme quadratique :

$$\rho_0 \bar{\chi} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \bar{S}_{ij} \bar{S}_{kl} - e_{m,ij} \bar{E}_m \bar{S}_{ij} - \frac{1}{2} \kappa_{ij} \bar{E}_i \bar{E}_j \quad (12.8)$$

12.3. Equations linéaires dans le repère de la plaque

Les équations d'équilibre, les équations constitutives et les conditions aux limites établies dans la première partie peuvent s'exprimer dans n'importe quel repère à condition que toutes les grandeurs tensorielles utilisées soient elles-mêmes exprimées dans ce repère.

L'étude de la prédéformation statique est facilitée par l'utilisation du repère $\{a'_1, a'_2, a'_3\}$ lié à la plaque et toutes les grandeurs exprimées dans ce repère seront primées.

L'équation d'équilibre (10.21) devient :

$$\frac{\partial \bar{T}'_{2i}}{\partial a'_2} = 0 \quad (12.9)$$

Le milieu considéré ne comportant pas de charges libres, le théorème de Gauss (10.22) se réduit à :

$$\boxed{\frac{\partial \bar{D}'_2}{\partial a'_2} = 0} \quad (12.10)$$

et les équations constitutives (5.12)-(5.14) et (3.4), (5.9) deviennent :

$$\boxed{\bar{T}'_{ji} = C'_{jikl} \bar{S}'_{kl} - e'_{l,ij} \bar{E}'_l} \quad (12.11)$$

$$\boxed{\bar{D}'_j = e'_{j,kl} \bar{S}'_{kl} + \epsilon'_{jl} \bar{E}'_l} \quad (12.12)$$

Les conditions aux limites sont définies en écrivant que les faces de la plaque ne sont soumises à aucune contrainte :

$$\bar{T}'_{2i}(\pm h) = 0 \quad (12.13)$$

et que la tension continue $\bar{\Phi}_0$ est appliquée entre les ordonnées $\pm h$:

$$\bar{\Phi}(-h) = 0 \quad (12.14)$$

$$\bar{\Phi}(h) = \bar{\Phi}_0 \quad (12.15)$$

12.4. Forme matricielle des équations

Lorsqu'on reporte les équations constitutives (12.11), (12.12) dans les équations du mouvement (12.9), (12.10) seul un petit nombre de coefficients élastiques et piézoélectriques interviennent. L'utilisation de la représentation matricielle exposée au §7.1 permet alors un formalisme plus concis.

En appelant :

$$\bar{U}' = \begin{bmatrix} \bar{u}'_1 \\ \bar{u}'_2 \\ \bar{u}'_3 \end{bmatrix} \quad (12.16)$$

la matrice des déplacements statiques et :

$$\Delta' = \begin{bmatrix} C'_{66} & C'_{26} & C'_{46} \\ C'_{26} & C'_{22} & C'_{24} \\ C'_{46} & C'_{24} & C'_{44} \end{bmatrix} \quad (12.17)$$

$$E' = \begin{bmatrix} e'_{2.6} \\ e'_{2.2} \\ e'_{2.4} \end{bmatrix} \quad (12.18)$$

les matrices des coefficients élastiques et piézoélectriques utiles, les équations constitutives reportées dans les équations d'équilibre conduisent aux équations matricielles suivantes :

$$\Delta' \cdot \frac{\partial^2 \bar{U}'}{\partial a_2'^2} + E' \cdot \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial a_2'^2} = 0 \quad (12.19)$$

$${}^t E' \cdot \frac{\partial^2 \bar{U}'}{\partial a_2'^2} - \epsilon'_{22} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial a_2'^2} = 0 \quad (12.20)$$

où ${}^t E'$ désigne la matrice transposée de E' .

En reportant les équations constitutives dans les conditions aux limites (12.13) on obtient :

$$\Delta' \cdot \frac{\partial \bar{U}'}{\partial a_2'}(\pm h) = -E' \cdot \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial a_2'}(\pm h) \quad (12.21)$$

12.5. Gradients de déplacements et de potentiel statiques

Les équations (12.19), (12.20) constituent un système homogène d'équations linéaires à quatre inconnues dont la seule solution possible est la solution triviale zéro :

$$\frac{\partial^2 \bar{U}'}{\partial a_2'^2} = 0 \quad (12.22)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial a_2'^2} = 0 \quad (12.23)$$

L'intégration de l'équation (12.23) montre que :

$$\bar{\phi} = Ka'_2 + H \quad (12.24)$$

où K et H sont deux constantes d'intégration déterminées en utilisant les conditions aux limites (12.14) et (12.15) :

$$K = \frac{\bar{\Phi}_0}{2h} \quad (12.25)$$

$$H = \frac{\bar{\Phi}_0}{2} \quad (12.26)$$

L'équation (12.22) montre que les gradients de déplacements sont des constantes que l'on peut obtenir à partir de l'équation (12.21) :

$$\frac{\partial \bar{U}'}{\partial a'_2} = \frac{\partial \bar{U}'}{\partial a'_2}(\pm h) = -\Delta'^{-1} \cdot E' \cdot \frac{\bar{\Phi}_0}{2h} \quad (12.27)$$

En appelant σ'_m les composantes de la matrice $\Delta'^{-1} \cdot E'$, on peut exprimer les gradients de déplacements et de potentiel sous la forme tensorielle suivante :

$$\frac{\partial \bar{u}'_m}{\partial a'_2} = -\sigma'_m \cdot \frac{\bar{\Phi}_0}{2h} \quad (12.28)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial a'_2} = \frac{\bar{\Phi}_0}{2h} \quad (12.29)$$

12.6. Prédéformation dans le cas d'un gradient de potentiel suivant un axe parallèle à la plaque

L'effet électroélastique dans un résonateur où diffusent des impuretés présente quelquefois un comportement impossible à expliquer par un modèle unidimensionnel (cf. §26). Sans prétendre établir une analyse rigoureuse, qui ne pourrait être conduite que sur un modèle bi ou tridimensionnel, il est cependant possible de montrer que les anomalies observées expérimentalement peuvent être expliquées par l'apparition d'une composante de champ électrique parallèle à la plaque.

A cette fin, la prédéformation de la plaque sera calculée pour un champ électrique dirigé suivant a'_1 (resp. a'_3) (cf. Fig. 12.1).

Les hypothèses de travail restent analogues à celles du calcul précédent :

- Extrémités de la plaque libres de contraintes :

$$\bar{T}'_{1i}(\pm l) = 0 \quad \text{resp.} \quad T'_{3i}(\pm L) = 0 \quad (12.30)$$

où l et L sont les dimensions de la plaque suivant a'_1 (resp. a'_3).

- Champ homogène suivant a'_1 (resp. a'_3) :

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial a'_1} = -\bar{E}'_1 \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial a'_3} = -\bar{E}'_3 \quad (12.31)$$

Dans ces conditions, le calcul est formellement analogue à celui des pages précédentes.

Les équations d'équilibre (12.9) et (12.10) s'écrivent ici :

$$\frac{\partial \bar{T}'_{1i}}{\partial a'_2} = 0 \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial \bar{T}'_{3i}}{\partial a'_3} = 0 \quad (12.32)$$

$$\frac{\partial D'_1}{\partial a'_1} = 0 \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial D'_3}{\partial a'_3} = 0 \quad (12.33)$$

avec la définition (12.16), les équations matricielles (12.19) et (12.20) deviennent :

$$\Delta'_1 \cdot \frac{\partial^2 \bar{U}'}{\partial a'^2_1} + E'_1 \cdot \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial a'^2_1} = 0 \quad \text{resp.} \quad \Delta'_3 \cdot \frac{\partial^2 \bar{U}'}{\partial a'^2_3} + E'_3 \cdot \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial a'^2_3} = 0 \quad (12.34)$$

$$t_{E'_1} \cdot \frac{\partial^2 \bar{U}'}{\partial a'^2_1} \frac{\partial^2 \bar{U}'}{\partial a'^2_3} - \epsilon'_{11} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial a'^2_1} = 0 \quad \text{resp.} \quad t_{E'_3} \cdot \frac{\partial^2 \bar{U}'}{\partial a'^2_3} - \epsilon'_{33} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial a'^2_3} = 0 \quad (12.35)$$

avec :

$$\Delta'_1 = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{16} & C'_{15} \\ C'_{16} & C'_{66} & C'_{56} \\ C'_{15} & C'_{56} & C'_{55} \end{bmatrix} \quad \text{resp.} \quad \Delta'_3 = \begin{bmatrix} C'_{55} & C'_{45} & C'_{35} \\ C'_{45} & C'_{44} & C'_{34} \\ C'_{35} & C'_{34} & C'_{33} \end{bmatrix} \quad (12.36)$$

et :

$$E'_1 = \begin{bmatrix} e'_{1.1} \\ e'_{1.6} \\ e'_{1.5} \end{bmatrix} \quad \text{resp.} \quad E'_3 = \begin{bmatrix} e'_{3.5} \\ e'_{3.4} \\ e'_{3.3} \end{bmatrix} \quad (12.37)$$

Comme au §12.5 on obtient les gradients de déplacement sous la forme tensorielle :

$$\boxed{\frac{\partial \bar{u}'_m}{\partial a'_1} = \sigma'_{1m} \bar{E}'_1} \quad \text{resp.} \quad \boxed{\frac{\partial \bar{u}'_m}{\partial a'_3} = \sigma'_{3m} \bar{E}'_3} \quad (12.38)$$

$$\boxed{\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial a'_1} = -\bar{E}'_1} \quad \text{resp.} \quad \boxed{\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial a'_3} = -\bar{E}'_3} \quad (12.39)$$

σ'_{1m} et σ'_{3m} étant les éléments de $\Delta'^{-1}_{11} \cdot E'$ et $\Delta'^{-1}_{33} \cdot E'$.

13. VIBRATIONS D'UNE PLAQUE MINCE, SOLUTION LINEAIRE [TIERSTEN, 1969]

Dans ce paragraphe et dans les suivants, il ne sera question que du comportement dynamique, le symbole $\sim$ sera omis pour raison de clarté.

Seules les solutions correspondant aux vibrations libres d'une plaque mince unidimensionnelle seront abordées.

13.1. Approximations linéaires

Les hypothèses relatives à cette étude sont identiques à celles du paragraphe précédent (§12.1). Le milieu étant unidimensionnel, un point M de coordonnées a_i ($\vec{OM} = \vec{a}$) dans le repère cristallin peut être repéré par la seule ordonnée a'_2 obtenue en projetant le vecteur $\vec{a}$ sur la normale $\vec{n}$:

$$a'_2 = \vec{a} \cdot \vec{n} = a_i n_i \quad (13.1)$$

avec (cf. (12.1)) :

$$n_i = p_{2i} \quad (13.2)$$

La forme particulière du milieu ainsi défini conduit à chercher la solution dynamique sous forme d'ondes planes se propageant dans la direction $\vec{n}$.

Les approximations de l'étude dynamique linéaire sont en tous points analogues à celles du §12.2 :

$$\frac{\partial a_k}{\partial x_j} \approx \delta_{kj} \quad (13.3)$$

$$J \approx 1 \quad (13.4)$$

$$N_i \approx n_i \quad (13.5)$$

D'où l'on tire :

$$\epsilon_{ij} \approx T_{ij} \quad (13.6)$$

$$\varphi_j \approx D_j \quad (13.7)$$

$$\epsilon_i \approx E_i \approx - \frac{\partial \phi}{\partial a_i} \quad (13.8)$$

$$\eta_{ij} \approx S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right) \quad (13.9)$$

Comme précédemment (§12.2), on prendra l'énergie sous forme quadratique :

$$\rho_0 \chi = \frac{1}{2} C_{ijkl} S_{ij} S_{kl} - e_{m,ij} E_m S_{ij} - \frac{1}{2} \kappa_{ij} E_i E_j \quad (13.10)$$

13.2. Equations linéaires

L'équation d'équilibre (6.2) devient :

$$\rho_0 \ddot{u}_i = \frac{\partial T_{ji}}{\partial a_j} \quad (13.11)$$

Le milieu considéré ne comportant pas de charges libres, le théorème de Gauss (6.4) se réduit à :

$$\frac{\partial D_j}{\partial a_j} = 0 \quad (13.12)$$

et les équations constitutives (5.12)–(5.14) et (3.4), (5.9) deviennent :

$$T_{ji} = C_{jikl} S_{kl} - e_{l,ij} E_l \quad (13.13)$$

$$D_j = e_{j,kl} S_{kl} + \epsilon_{jl} E_l \quad (13.14)$$

En reportant les équations constitutives dans les équations d'équilibre on obtient les équations linéaires du mouvement :

$$\rho_0 \ddot{u}_i = C_{jikl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial a_l \partial a_j} + e_{l,ji} \frac{\partial^2 \phi}{\partial a_l \partial a_j} \quad (13.15)$$

$$0 = e_{j,kl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial a_l \partial a_j} - \epsilon_{jl} \frac{\partial^2 \phi}{\partial a_l \partial a_j} \quad (13.16)$$

Dans le cas des vibrations libres, les conditions aux limites s'obtiennent en écrivant que les faces de la plaque ne sont soumises à aucune contrainte et ne portent aucune charge :

$$\eta_i T_{ij}(\pm h) = 0 \quad (13.17)$$

$$\eta_i D_i(\pm h) = 0 \quad (13.18)$$

13.3. Equations aux valeurs propres

La solution des équations (13.15), (13.16) est recherchée sous forme d'une onde plane de pulsation ω se propageant dans la direction $\vec{n}$ à la vitesse V :

$$u_i = U_i \exp\left[j\omega\left(t - \frac{n_k a_k}{V}\right)\right] \quad (13.19)$$

Les conditions aux limites n'introduisant pas de couplage entre déplacement et potentiel, ce dernier s'exprime par une relation analogue à (13.19) :

$$\phi = \Phi \exp\left[j\omega\left(t - \frac{n_k a_k}{V}\right)\right] \quad (13.20)$$

En introduisant les dérivées successives de ces expressions dans les équations du mouvement (13.15) et (13.16) on obtient :

$$\rho_0 V^2 U_i = \Gamma_{ik} U_k + \gamma_i \Phi \quad (13.21)$$

$$0 = \gamma_k U_k - \epsilon \Phi \quad (13.22)$$

Γ_{ij} , γ_k et ϵ sont les coefficients de Christoffel obtenus en projetant les coefficients matériels sur la normale :

$$\Gamma_{ik} = C_{jikl} n_j n_l \quad (13.23)$$

$$\gamma_i = e_{\lambda,ji} n_j n_l \quad (13.24)$$

$$\epsilon = \epsilon_{jl} n_j n_l \quad (13.25)$$

En reportant la relation (13.22) dans (13.21) on obtient l'équation suivante

$$\rho_0 V^2 U_i = \left(\Gamma_{ik} + \frac{\gamma_i \gamma_k}{\epsilon}\right) U_k \quad (13.26)$$

que l'on peut écrire :

$$\boxed{(\bar{\Gamma}_{ik} - \lambda \delta_{ik}) U_k = 0} \quad (13.27)$$

en posant :

$$\bar{\Gamma}_{ik} = \Gamma_{ik} + \frac{\gamma_i \gamma_k}{\epsilon} \quad (13.28)$$

$$\lambda = \rho_0 V^2 \quad (13.29)$$

13.4. Vitesses et directions propres

L'équation (13.27) représente un système homogène de trois équations à trois inconnues qui ne peut admettre une solution non nulle que si son déterminant est nul :

$$\boxed{\det(\bar{\Gamma}_{ik} - \delta_{ik} \lambda) = 0} \quad (13.30)$$

La forme symétrique du tenseur $\bar{\Gamma}_{ik}$ indique que dans le cas général il existe trois solutions propres λ correspondant à trois vitesses propres de propagation. Les vecteurs propres correspondants sont orthogonaux.

Une solution propre sera notée avec un indice (s), les parenthèses indiquant que cet indice n'obéit pas aux règles de sommation implicite :

- valeur propre $\lambda_{(s)}$
- vecteur propre $\vec{\lambda}^{(s)} (\lambda_i^{(s)})$
- vitesse propre $v_{(s)}$
- pulsation propre $\omega_{(s)}$
- amplitudes propres $\mathbf{u}_i^{(s)}$

Les valeurs propres $\lambda_{(s)}$ sont obtenues en résolvant l'équation (13.30) et les directions propres $\lambda_i^{(s)}$ sont définies par la relation :

$$\boxed{\bar{\Gamma}_{ik} \lambda_k^{(s)} = \lambda_{(s)} \lambda_i^{(s)}} \quad (13.31)$$

Ces vecteurs propres constituent une base orthonormée et permettent d'exprimer les amplitudes propres :

$$\mathbf{u}_k^{(s)} = N^{(s)} \lambda_k^{(s)} \quad (13.32)$$

à l'aide du facteur de normalisation :

$$N^{(s)} = \sqrt{\mathbf{u}_j^{(s)} \cdot \mathbf{u}_j^{(s)}} \quad (13.33)$$

13.5. Pulsations propres

En reportant les conditions aux limites (13.17), (13.18) dans les équations constitutives (13.13), (13.14) on établit les relations suivantes :

$$\Gamma_{ik} u_k(\pm h) + \gamma_i \phi(\pm h) = 0 \quad (13.34)$$

$$\gamma_k u_k(\pm h) - \epsilon \phi(\pm h) = 0 \quad (13.35)$$

qui peuvent aussi s'écrire :

$$\bar{\Gamma}_{ik} u_k(\pm h) = 0 \quad (13.36)$$

La forme (13.19), (13.20) de la solution impose la relation suivante entre la pulsation et la vitesse :

$$\boxed{\omega(s) = \frac{n\pi V(s)}{2h}} \quad (13.37)$$

où n est un entier quelconque.

Si l'on ne s'intéresse qu'aux modes antisymétriques, compte tenu des restrictions imposées par les conditions aux limites, l'équation (13.37) devient :

$$\omega(s) = \frac{(2n+1)\pi V(s)}{2h} \quad (13.38)$$

14. METHODE DES PERTURBATIONS [TIERSTEN, 1978]

Lorsque la prédéformation est faible, on peut obtenir la solution des équations dynamiques dans le milieu prédéformé à partir de la solution linéaire précédemment établie.

Comme dans le paragraphe précédent, le tilde sur les variables dynamiques sera omis.

14.1. Equations perturbées et non perturbées

On notera par un accent circonflexe les variables perturbées, les équations (10.23), (10.24), (10.9) et (10.10) adaptées au cas où il n'existe pas de charges en mouvement s'écrivent ici :

$$\rho_0 \hat{u}_{,j} = \frac{\partial \hat{\mathcal{E}}_{ij}}{\partial a_i} \quad (14.1)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{Z}}_m}{\partial a_m} = 0 \quad (14.2)$$

$$\hat{\mathcal{E}}_{ij} = A_{ijkl} \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial a_l} + A_{\ell j i} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial a_\ell} \quad (14.3)$$

$$\hat{\mathcal{Z}}_m = A_{mkl} \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial a_l} + A_{m\ell} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial a_\ell} \quad (14.4)$$

Les tenseurs A sont donnés par les relations (11.6)–(11.11).

Ces équations sont peu différentes des équations linéaires étudiées dans le paragraphe précédent :

$$\rho_0 \ddot{u}_j = \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}}{\partial a_i} \quad (14.5)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Z}_m}{\partial a_m} = 0 \quad (14.6)$$

$$\mathcal{E}_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial a_l} + e_{\ell,ji} \frac{\partial \phi}{\partial a_\ell} \quad (14.7)$$

$$\mathcal{Z}_m = e_{m,kl} \frac{\partial u_k}{\partial a_l} - \varepsilon_{m\ell} \frac{\partial \phi}{\partial a_\ell} \quad (14.8)$$

cf. tableaux (6.A)–(6.C).

Les caractéristiques de propagation des ondes seront conservées, les fréquences propres subiront une petite modification que l'on se propose de déterminer :

$$\hat{\omega} = \omega \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega} \right) \quad (14.9)$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \ll 1 \quad (14.10)$$

Comme on aura systématiquement à faire des calculs identiques pour les trois modes, les indices (s) seront provisoirement abandonnés.

14.2. Perturbation de l'équation du mouvement

En reportant les solutions u_j et $\hat{u}_j$ de pulsations respectives ω et $\hat{\omega}$ (cf. (13.19)) dans les équations (14.1) et (14.5) on obtient :

$$-\rho_0 \omega^2 u_j = \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}}{\partial a_i} \quad (14.11)$$

$$-\rho_0 \hat{\omega}^2 \hat{u}_j = \frac{\partial \hat{\mathcal{E}}_{ij}}{\partial a_i} \quad (14.12)$$

En multipliant la première de ces relations par $\hat{u}_j$ et la seconde par u_j on obtient, en effectuant la différence membre à membre et en négligeant les termes du second ordre :

$$2\rho_0 \omega \Delta\omega u_j \hat{u}_j = \frac{\partial}{\partial a_i} (\mathcal{E}_{ij} \hat{u}_j - \hat{\mathcal{E}}_{ij} u_j) - \left(\mathcal{E}_{ij} \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial a_i} - \hat{\mathcal{E}}_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right) \quad (14.13)$$

Après intégration sur le volume V_0 du cristal, on obtient en utilisant la formule d'Ostrogradski :

$$\begin{aligned} 2\rho_0 \omega \Delta\omega \iiint_{V_0} u_j \hat{u}_j dV &= \iint_{S_0} (N_i \mathcal{E}_{ij} \hat{u}_j - N_i \hat{\mathcal{E}}_{ij} u_j) dS \\ &\quad - \iiint_{V_0} \left(\mathcal{E}_{ij} \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial a_i} - \hat{\mathcal{E}}_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right) dV \end{aligned} \quad (14.14)$$

S_0 est la surface limitant le volume V_0 du cristal et $N_i dS$ sont les composantes de la normale correspondante.

Les quantités $N_i \mathcal{E}_{ij}$ ou $N_i \hat{\mathcal{E}}_{ij}$ correspondent à des forces de surface (cf. tableau 6.B) qui sont nulles dans le cas envisagé ici (cf. conditions aux limites (13.17)). Il reste :

$$2\rho_0 \omega \Delta \omega \iiint_{V_0} u_j \hat{u}_j dV = - \iiint_{V_0} (\mathcal{E}_{ij} \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial a_i} - \hat{\mathcal{E}}_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial a_i}) dV \quad (14.15)$$

14.3. Perturbation de l'équation d'équilibre électrique

La démarche est identique à celle du § précédent, en multipliant (14.2) par ϕ et (14.6) par $\hat{\phi}$ on obtient par différence :

$$\frac{\partial}{\partial a_m} (\mathfrak{A}_m \hat{\phi} - \hat{\mathfrak{A}}_m \phi) - (\mathfrak{A}_m \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial a_m} - \hat{\mathfrak{A}}_m \frac{\partial \phi}{\partial a_m}) = 0 \quad (14.16)$$

Après intégration sur le volume et application de la formule d'Ostrogradski, il vient :

$$\iint_{S_0} (N_m \mathfrak{A}_m \hat{\phi} - N_m \hat{\mathfrak{A}}_m \phi) dS - \iiint_{V_0} (\mathfrak{A}_m \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial a_m} - \hat{\mathfrak{A}}_m \frac{\partial \phi}{\partial a_m}) dV = 0 \quad (14.17)$$

$N_m \mathfrak{A}_m$ et $N_m \hat{\mathfrak{A}}_m$ représentent les charges de surface (tableau 6.B) qui sont nulles dans le cas considéré (cf. (13.18)), il reste :

$$\iiint_{V_0} (\mathfrak{A}_m \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial a_m} - \hat{\mathfrak{A}}_m \frac{\partial \phi}{\partial a_m}) dV = 0 \quad (14.18)$$

14.4. Perturbation de fréquence

En remplaçant dans l'équation (14.15) les tenseurs $\mathcal{E}_{ij}$ et $\hat{\mathcal{E}}_{ij}$ par leur valeur (14.7) et (14.3), et les tenseurs A par leur expression (11.6)–(11.11) on peut, après quelques transformations tenant compte de la relation (14.18) et des symétries sur les indices des coefficients C_{ijkl} et ϵ_{ij} , obtenir la relation suivante :

$$2\rho_0 \omega \Delta \omega \iiint_{V_0} u_j \hat{u}_j dV = \iiint_{V_0} \left[\hat{C}_{i,jkl} \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial a_l} + \hat{e}_{l,ji} \left(\frac{\partial \phi}{\partial a_l} \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial a_i} + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial a_l} \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right) - \hat{\epsilon}_{kl} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial a_k} \frac{\partial \phi}{\partial a_l} \right] dV \quad (14.19)$$

Cette relation n'est valable que dans le cas des ondes de volume où les quantités intervenant sous le signe somme sont réelles. Dans le cas où les variables sont complexes (cas des ondes de surface [HAUDEN, 1981]) la forme est un peu différente.

A ce niveau les déplacements, le potentiel et leurs gradients n'apparaissent que sous forme de produits et l'on peut, en négligeant les termes du second ordre, écrire ce résultat sous la forme :

$$2\rho_0 \omega \Delta \omega \iiint_{V_0} u_j u_j dV = \iiint_{V_0} \left[\hat{C}_{ijkl} \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \frac{\partial u_k}{\partial a_l} + 2\hat{C}_{l.ji} \frac{\partial \phi}{\partial a_l} \frac{\partial u_j}{\partial a_k} - \hat{\epsilon}_{kl} \frac{\partial \phi}{\partial a_k} \frac{\partial \phi}{\partial a_l} \right] dV \quad (14.20)$$

u_j et ϕ sont les solutions des équations linéaires obtenues au §13. Les solutions antisymétriques intéressantes correspondant aux solutions générales (13.19) et (13.20) peuvent se mettre sous la forme :

$$u_j = U_j \exp(j\omega t) \quad (14.21)$$

$$\phi = \Phi \exp(j\omega t) \quad (14.22)$$

avec :

$$U_j = \mathbf{U}_j \sin \frac{n_k a_k \omega}{v} \quad (14.23)$$

$$\Phi = \Phi \sin \frac{n_k a_k \omega}{v} \quad (14.24)$$

En reportant les relations (14.21) et (14.22) dans la relation (14.20) on peut éliminer le temps :

$$2\rho_0 \omega \Delta \omega \iiint_{V_0} U_j U_j dV = \iiint_{V_0} \left[\hat{C}_{ijkl} \frac{\partial U_j}{\partial a_i} \frac{\partial U_k}{\partial a_l} + 2\hat{\epsilon}_{l.ji} \frac{\partial \Phi}{\partial a_l} \frac{\partial U_j}{\partial a_k} - \hat{\epsilon}_{kl} \frac{\partial \Phi}{\partial a_k} \frac{\partial \Phi}{\partial a_l} \right] dV$$

(14.25)

CHAPITRE 5

L'EFFET ELECTROELASTIQUE, COEFFICIENTS MATERIELS ELECTROELASTIQUES

En explicitant les tenseurs correctifs figurant dans la perturbation de fréquence établie dans le chapitre précédent, on l'écrit en fonction des coefficients linéaires et non linéaires, de l'orientation de la plaque et des composantes de la prédéformation électrique. On obtient ainsi l'expression de la variation de fréquence soit en fonction de la répartition du champ dans le cristal (perturbation inhomogène qui sera utilisée lors de l'étude de la diffusion) soit en fonction d'un champ homogène normal ou parallèle à la plaque (effet électroélastique).

Les coefficients non linéaires électroélastiques sont calculés grâce à l'expression de l'effet électroélastique à partir de mesures expérimentales réalisées sur des résonateurs de différentes orientations.

Cette même relation est ensuite utilisée pour dresser la carte de l'effet électroélastique dans le quartz c'est-à-dire l'amplitude de la variation relative de fréquence par unité de champ appliqué en fonction de l'orientation de la plaque aussi bien pour un champ normal que pour les deux composantes d'un champ parallèle à la plaque.

Enfin l'examen des coefficients phénoménologiques publiés par d'autres auteurs montre que les symétries qui ont été attribuées à ces constantes ne sont pas respectées.

La méthode décrite et les résultats obtenus dans ce chapitre forment une contribution originale à l'étude des phénomènes non linéaires dans les cristaux piézoélectriques.

15. EXPRESSION DE LA PERTURBATION DE FREQUENCE

15.1. Perturbation de fréquence dans le repère de la plaque

L'intégration sur le volume (14.25) est plus simple si on peut l'exprimer dans le repère $\{a'_1, a'_2, a'_3\}$ lié à la plaque (Fig. 12.2) puisque seule intervient la dimension a'_2 .

L'expression (14.25) est un scalaire invariant dans un changement de repère qui peut donc s'écrire :

$$2\rho_0 \omega \Delta \omega \iiint_{V_0} U'_n U'_n dV = \iiint_{V_0} \left[\hat{C}'_{mpqn} \frac{\partial U'_q}{\partial a'_n} \frac{\partial U'_p}{\partial a'_m} + 2\hat{e}'_{n \cdot pm} \frac{\partial \Phi}{\partial a'_n} \frac{\partial U'_p}{\partial a'_m} - \hat{e}'_{mn} \frac{\partial \Phi}{\partial a'_n} \frac{\partial \Phi}{\partial a'_m} \right] dV \quad (15.1)$$

les accents indiquent que tous les tenseurs doivent être exprimés dans le repère de la plaque. Dans ce repère les déplacements et le potentiel ne dépendent que de la variable a'_2 (cf. §13.1) et la relation précédente se réduit à :

$$2\rho_0 \omega \Delta \omega \iiint_{V_0} U'_n U'_n dV = \iiint_{V_0} \left[\hat{C}'_{2pq2} \frac{\partial U'_p}{\partial a'_2} \frac{\partial U'_q}{\partial a'_2} + 2\hat{e}'_{2 \cdot p2} \frac{\partial \Phi}{\partial a'_2} \frac{\partial U'_p}{\partial a'_2} - \hat{e}'_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial a'_2} \frac{\partial \Phi}{\partial a'_2} \right] dV \quad (15.2)$$

Les déplacements U'_n sont liés aux variables correspondantes du repère cristallin par une relation identique à (12.1) :

$$U'_n = p_{nj} U_j \quad (15.3)$$

a'_2 est donnée par la relation :

$$a'_2 = p_{2i} a_i = n_i a_i \quad (15.4)$$

Les gradients de déplacements et de potentiel suivent les règles de transformation tensorielles (cf. §7.3) :

$$\frac{\partial U'_q}{\partial a'_n} = p_{qk} p_{nl} \frac{\partial U_k}{\partial a_l} \quad (15.5)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a'_n} = p_{nl} \frac{\partial \Phi}{\partial a_l} \quad (15.6)$$

15.2. Perturbation homogène et inhomogène

En remplaçant dans (14.23) l'amplitude U_j par sa valeur (13.32) on obtient l'expression suivante :

$$U_j = N \cdot \lambda_j \sin \left(\frac{n_k a_k \omega}{V} \right) \quad (15.7)$$

de même, la relation (13.22) permet d'écrire le potentiel Φ sous la forme :

$$\Phi = \frac{\gamma_j U_j}{\epsilon} = N \frac{\gamma_j \lambda_j}{\epsilon} \sin \left(\frac{n_k a_k \omega}{V} \right) \quad (15.8)$$

ou encore :

$$\Phi = N \cdot r \cdot \sin \left(\frac{n_k a_k \omega}{V} \right) \quad (15.9)$$

avec :

$$r = k \sqrt{\lambda/\epsilon} \quad (15.10)$$

Le coefficient k représente le facteur de couplage électromécanique :

$$k = \frac{\gamma_j \lambda_j}{\sqrt{\epsilon \lambda}} \quad (15.11)$$

λ étant la valeur propre du mode de vibration considéré (§13.4).

En effectuant les dérivations et les produits dans l'intégrale (15.2) on obtient, après quelques transformations, l'expression de la variation relative de fréquence sous la forme :

$$\boxed{\frac{\Delta \omega}{\omega} = \frac{1}{2\lambda h} \int_{-h}^h \left[\hat{C}'_{2pq2} \lambda'_p \lambda'_q + 2r \hat{e}'_{2.p2} \lambda'_p - r^2 \hat{\epsilon}'_{22} \right] \cos^2 \left(\frac{\omega a'_2}{V} \right) da'_2} \quad (15.12)$$

avec :

$$\lambda'_p = p_{p,j} \lambda_j \quad (15.13)$$

composantes des vecteurs propres du mode considéré dans le repère de la plaque (§13.4).

La relation (15.12) est valable même dans le cas d'une prédéformation inhomogène (les tenseurs $\hat{C}'$, $\hat{e}'$ et $\hat{\varepsilon}'$ pouvant dépendre de l'ordonnée a'_2). Dans le cas d'une prédéformation homogène la variation de fréquence prend la forme :

$$\boxed{\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{1}{2\lambda} [\hat{C}'_{2pq} \lambda'_p \lambda'_q + 2r \hat{e}'_{2.p} \lambda'_p - r^2 \hat{\varepsilon}'_{22}]} \quad (15.14)$$

Il convient de rappeler ici que pour une orientation donnée de la plaque, il existe trois relations de ce type correspondant aux trois modes de vibration possibles.

15.3. Perturbation en fonction des gradients de déplacements et de potentiel

En remplaçant dans l'équation (15.12) les tenseurs correctifs $\hat{C}$, $\hat{e}$ et $\hat{\varepsilon}$ par les relations (11.9)–(11.11) exprimées dans le repère de la plaque et en utilisant les formules de changement de repère sur les tenseurs rappelées au §7.3, on peut exprimer l'intégrale (15.12) en fonction des coefficients non linéaires rapportés aux axes cristallins et des gradients de déplacements et de potentiel rapportés aux axes liés à la plaque :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{1}{2\lambda h} \int_{-h}^h \left[\hat{C}_m \frac{\partial \bar{u}'_m}{\partial a'_2} + \hat{D} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial a'_2} \right] \cos^2\left(\frac{\omega a'_2}{V}\right) da'_2 \quad (15.15)$$

avec :

$$\begin{aligned} \hat{C}_m = & n_j \Gamma_{jn} (p_{mn} + 2p_{mr} \lambda_r \lambda_n) + \Gamma_{l rn} p_{ml} \lambda_r \lambda_n \\ & + 2r (n_j \gamma_{j p mr} \lambda_r + \gamma_{rn} p_{mr} \lambda_n) - r^2 (\eta_r p_{mr} - \varepsilon_o \delta_{m2}) \end{aligned} \quad (15.16)$$

$$\hat{D} = n_j \gamma_j + \gamma_{rn} \lambda_r \lambda_n - 2r (\eta_r \lambda_r - \varepsilon_o n_i \lambda_i) + r^2 \kappa \quad (15.17)$$

n_i et p_{ij} sont les composantes de la normale et de la matrice de passage (Eqs. (12.1) et (13.2)), λ_i celles du vecteur propre considéré, les tenseurs Γ_{ik} , γ_i et ε sont définis par les relations (13.23)–(13.25), λ et r par (13.29) et (15.10) respectivement. Les autres tenseurs utilisés sont les projections des coefficients non linéaires sur la normale :

$$\Gamma_{l rn} = C_{iljrkn} n_i n_j n_k \quad (15.18)$$

$$\gamma_{rn} = e_{i.jrkn} n_i n_j n_k \quad (15.19)$$

$$\eta_r = e_{ij.kr} n_i n_j n_k \quad (15.20)$$

$$\kappa = \varepsilon_{ijk} n_i n_j n_k \quad (15.21)$$

15.4. Perturbation dans le cas de l'effet électroélastique

En introduisant les résultats de l'étude statique (Eqs (12.28) et (12.29)) dans l'équation (15.15) on peut obtenir la perturbation de fréquence en fonction de la répartition du champ électrique statique dans l'épaisseur du cristal :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\hat{D} - \sigma'_m \hat{C}_m}{2\lambda h} \int_{-h}^h \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial a'_2} \cos^2\left(\frac{\omega a'_2}{V}\right) da'_2 \quad (15.22)$$

Cette relation sera utilisée et précisée lors de l'étude de la diffusion. Dans le cas d'un champ électrique homogène (Eq. (12.29)), cette relation devient :

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_H = \frac{\bar{\Phi}_0}{4\lambda h} (\hat{D} - \sigma'_m \hat{C}_m) \quad (15.23)$$

On appelle effet électroélastique, la variation relative de fréquence rapportée à l'unité de champ électrique statique appliqué sur le résonateur :

$$\bar{E} = - \frac{\bar{\Phi}_0}{2h} \quad (15.24)$$

d'où :

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega E}\right)_H = \frac{1}{2\lambda} (\sigma'_m \hat{C}_m - \hat{D}) \quad (15.25)$$

La variation (15.22) peut également s'exprimer en fonction de la perturbation homogène :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{2}{\bar{\Phi}_0} \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_H \int_{-h}^h \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial a'_2} \cos^2\left(\frac{\omega a'_2}{V}\right) da'_2 \quad (15.26)$$

15.5. Perturbation dans le cas d'un champ électrique parallèle à la plaque

La prédéformation due à une composante de champ dirigée parallèlement à la plaque a été établie au §12.6. Seule la perturbation de fréquence homogène consécutive à cette prédéformation sera calculée ici pour les raisons qui ont été évoquées au §12.6 et qui seront précisées au moment de l'étude de la diffusion (§26).

La perturbation homogène se calcule comme dans le cas du champ normal, seules certaines projections s'effectuent sur la tangente, ce qui donne lieu à une expression un peu différente de l'effet électroélastique :

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega E_H}\right) = \frac{1}{2\lambda} \left[\Gamma_s^t \sigma_s + 2\Gamma_s^p \sigma_r \ell_r \ell_s + \Gamma_{rst}^t \sigma_t \ell_r \ell_s - \gamma^t + 2r\gamma^p \sigma_r \ell_r - \gamma_{rs}^t \ell_r \ell_s \right. \\ \left. + 2r\gamma^p \sigma_r \ell_r + 2r\eta_r^t \ell_r - r^2 \eta_r^p \sigma_r - 2r\epsilon_o^t \ell_r \ell_r - r^2 \epsilon_o \sigma_1^t - r^2 \kappa^t \right] \quad (15.27)$$

(3)

avec :

$$\Gamma_s^t = n_i n_j t_k C_{ijks} \quad (15.28)$$

$$\Gamma_s^p = t_i n_j n_k C_{ijks} \quad (15.29)$$

$$\Gamma_{rst}^t = n_i n_j t_k C_{irjskt} \quad (15.30)$$

$$\gamma^t = t_i n_j n_k e_{i.jk} \quad (15.31)$$

$$\gamma^p = n_i t_j n_k e_{i.jk} \quad (15.32)$$

$$\gamma_{rs}^t = t_i n_j n_k e_{i.jrks} \quad (15.33)$$

$$\eta_r^t = n_i t_j n_k e_{ij.kr} \quad (15.34)$$

$$\eta_r^p = n_i n_j t_k e_{ij.kr} \quad (15.35)$$

$$\kappa^t = n_i n_j t_k \epsilon_{ijk} \quad (15.36)$$

λ et r ont la même signification que dans les relations (13.29) et (15.10), t_k représente les composantes de la tangente suivant laquelle est dirigé le champ électrique, de même σ_r désigne les composantes de la prédéformation rapportées au repère de référence (cf. §12.6).

Dans le cas d'un champ dirigé suivant a_1' on aura :

$$t_k = p_{1k} \quad (15.37)$$

et

$$\sigma_r = \sigma_{1r} \quad (15.38)$$

Si le champ est dirigé suivant a'_3 on prendra :

$$t_k = p_{3k} \quad (15.39)$$

et

$$\sigma_r = \sigma_{3r} \quad (15.40)$$

et il y aura lieu de modifier également l'indice de l'avant dernier terme de la relation (15.27) qui reste exprimé dans le repère de la plaque (indice entre parenthèses).

16. DETERMINATION DES COEFFICIENTS ELECTROELASTIQUES

Comme on l'a vu dans la présentation de ce mémoire, l'effet électroélastique ne peut pas être imputé uniquement à l'effet piézoélectrique inverse ni même aux effets non linéaires purement mécaniques, les principaux responsables sont par conséquent les coefficients piézoélectriques non linéaires : coefficients électroélastiques et électrostriction.

Ces coefficients n'ont pas été complètement déterminés jusqu'ici pour le quartz et l'effet électroélastique apparaît comme une méthode tout à fait adaptée pour accéder à certains d'entre eux.

Il faut indiquer ici que seuls les coefficients électroélastiques peuvent être déterminés par cette méthode, en effet, l'électrostriction est une fonction paire du champ électrique appliqué (cf. (5.18)), la variation de fréquence consécutive à cet effet ne doit donc pas dépendre du sens d'application du champ électrique alors que la variation de fréquence due aux coefficients électroélastiques change de signe selon le sens du champ électrique (l'effet électroélastique est une fonction impaire du champ). Si l'électrostriction jouait un rôle dans la variation de fréquence, on devrait observer une différence d'amplitude lorsqu'on inverse le sens du champ or aucune différence appréciable n'a pu être mise en évidence expérimentalement [HRUSKA, 1971b].

En outre, l'électrostriction est une fonction quadratique du champ appliqué alors que l'effet électroélastique est linéaire, expérimentalement, la variation de fréquence en fonction de l'intensité du champ électrique ne s'écarte pas de la ligne droite, ce qui prouve là aussi que l'électrostriction n'intervient pas [HRUSKA, 1961, 1962].

On peut également préciser que la permittivité du 3e ordre dont la valeur a été établie par d'autres méthodes [BESSON, 1972] ne joue pratiquement aucun rôle non plus.

16.1. Equations électroélastiques

Les facteurs $\hat{C}_m$ et $\hat{D}$ de la relation (15.25) donnés par les relations (15.16) et (15.17) font intervenir les coefficients linéaires et non linéaires du quartz et parmi eux les coefficients électroélastiques cherchés. Un nombre suffisant de mesures de l'effet électroélastique $\left(\frac{\Delta\omega}{\omega E}\right)_H$ permet de déterminer ces coefficients à partir des équations :

$$F_{ijklm} e_{i,jklm} = 2\lambda \left(\frac{\Delta\omega}{\omega E}\right)_H - (M + N + P + Q + R) \quad (16.1)$$

que l'on tire des équations (15.25) et (15.16)-(15.21) avec :

$$F_{ijklm} = n_i n_j n_k (2r \sigma_l - \lambda_l) \lambda_m \quad (16.2)$$

$$M = \sigma_i n_j \Gamma_{jk} (\delta_{ik} + 2\lambda_i \lambda_k) \quad (16.3)$$

$$N = \sigma_i \Gamma_{ijk} \lambda_j \lambda_k \quad (16.4)$$

$$P = \gamma_i n_i (2r \sigma_j \lambda_j - 1) \quad (16.5)$$

$$Q = r \epsilon_o (\sigma'_2 r - 2n_i \lambda_i) \quad (16.6)$$

$$R = -r^2 \kappa \quad (16.7)$$

$$\sigma_j = p_{ij} \sigma'_i \quad (16.8)$$

Le tenseur électroélastique du quartz ne comporte que 8 composantes indépendantes (cf. §7.5) ; en groupant au premier membre de l'équation (16.1), à l'aide des relations de dépendance résumées dans le tableau de l'annexe A §5, les facteurs correspondant aux mêmes coefficients indépendants, les équations (16.1) se ramènent à :

$$A_i X_i = T \quad (i = 1, 2, \dots, 8) \quad (16.9)$$

où X_i désignent les 8 coefficients indépendants :

$$\begin{aligned} X_1 &= e_{1.11} & X_5 &= e_{1.24} \\ X_2 &= e_{1.13} & X_6 &= e_{1.34} \\ X_3 &= e_{1.14} & X_7 &= e_{1.44} \\ X_4 &= e_{1.22} & X_8 &= e_{3.15} \end{aligned} \quad (16.10)$$

T représente le second membre de l'équation (16.1).

Les coefficients A_i résultent de l'application des relations de dépendance du tableau de l'annexe A §5. En utilisant la représentation matricielle pour les facteurs F_{ijklm} (cf. tableau 7.A) on obtient :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= F_{111} - \frac{1}{2} (F_{112} + F_{121}) - \frac{1}{2} F_{166} + \frac{1}{4} (F_{216} + F_{261}) - \frac{3}{4} (F_{226} + F_{262}) \\
 A_2 &= (F_{113} + F_{131}) - (F_{123} + F_{132}) - (F_{236} + F_{263}) \\
 A_3 &= (F_{114} + F_{141}) - \frac{1}{2} (F_{156} + F_{165}) - (F_{225} + F_{252}) + \frac{1}{2} (F_{246} + F_{264}) \\
 A_4 &= F_{122} - \frac{1}{2} (F_{112} + F_{121}) - \frac{1}{2} F_{166} + \frac{3}{4} (F_{216} + F_{261}) - \frac{1}{4} (F_{226} + F_{262}) \\
 A_5 &= (F_{124} + F_{142}) + \frac{1}{2} (F_{156} + F_{165}) - \frac{1}{2} (F_{215} + F_{251}) - \frac{1}{2} (F_{246} + F_{264}) \quad (16.11) \\
 A_6 &= (F_{134} + F_{143}) - (F_{235} + F_{253}) \\
 A_7 &= F_{144} - F_{155} + (F_{245} + F_{254}) \\
 A_8 &= (F_{315} + F_{351}) - (F_{325} + F_{352}) - (F_{346} + F_{364})
 \end{aligned}$$

16.2. Coefficients électroélastiques

De nombreuses mesures de l'effet électroélastique correspondant à des coupes et des modes de vibration variés [HRUSKA, 1977, 1978a], [KUSTERS, 1970] ont été publiées. 70 équations du type (16.9) ont ainsi pu être utilisées pour le calcul des coefficients électroélastiques formant un système de 70 équations à 8 inconnues :

$$A_i^n X_i = T^n \quad i = 1, 2, \dots, 8 \quad n = 1, 2, \dots, 70 \quad (16.12)$$

Ce système a été résolu par la méthode des moindres carrés et le résultat du calcul est représenté dans le tableau 16.A.

L'erreur quadratique moyenne est de l'ordre de 6 % et les tolérances indiquées ont été calculées à partir de l'incertitude expérimentale de ± 5 % admise sur la mesure de l'effet électroélastique, on s'aperçoit que l'incertitude relative est de moins de 20 % sauf pour les coefficients $e_{1.22}$ et $e_{1.44}$ qui ne jouent probablement qu'un rôle mineur dans l'effet électroélastique pour les coupes utilisées.

Les valeurs du tableau 16.A sont données pour le quartz droit (cf. annexe B), pour le quartz gauche tous les signes sont inversés.

Tableau 16.A

Coefficients électroélastiques matériels pour le quartz droit à 20°C en C/m²

e _{1.11}	- 2,73	± 0,13
e _{1.13}	-12	± 1,2
e _{1.14}	33,4	± 6,1
e _{1.22}	3,05	± 1,9
e _{1.24}	34,6	± 7,2
e _{1.34}	50,5	± 8,2
e _{1.44}	- 0,6	± 1,1
e _{3.15}	24,9	± 2,9

A titre de comparaison, le tableau 16.B montre les contributions des divers coefficients matériels, linéaires et non linéaires, à l'effet électroélastique pour une coupe particulière. On note sur cet exemple que les coefficients électroélastiques ne sont pas toujours les principaux responsables de l'effet électroélastique.

Tableau 16.B

Contribution des différents coefficients à l'effet électroélastique pour les trois modes de vibration d'une plaque coupe FC
(yxwl)_{15°/34°} (en 10⁻¹² m/V)

Mode →	C	B	A
coef. élast. 2e ordre	1,65	0,96	0,65
coef. élast. 3e ordre	- 7,49	- 1,31	- 0,97
coef. piézo 2e ordre	- 1,06	- 0,87	- 0,27
coef. électroélastique	4,19	4,41	2,5
permittivité 2e ordre	- 0,13	- 0.02	- 0.08
permittivité 3e ordre	- 0,01	0	0
Total	- 2,85	3,17	1,83

16.3. Représentation de l'effet électroélastique

Lorsque les coefficients électroélastiques sont connus, la relation (15.25) permet de prévoir, pour une orientation et un mode de vibration déterminés, l'amplitude de l'effet électroélastique.

La Fig. 16.1 représente cette amplitude pour les trois modes de vibration possibles en fonction de l'angle ϕ compris entre 0 et 60° pour différentes valeurs de θ comprises entre 0 et 60° . Du fait des symétries cristallines, les courbes correspondant à ϕ compris entre 60° et 120° sont symétriques des précédentes par rapport au point d'abscisse $\phi = 60^\circ$. L'amplitude des courbes décroît lorsque θ augmente et devient négligeable pour $\theta > 60^\circ$.

Les courbes présentées sont très voisines de celles publiées par Hruska [HRUSKA, 1978b] et obtenues par ses propres coefficients phénoménologiques, ce qui signifie seulement que ces coefficients sont capables de représenter l'effet électroélastique (puisque c'est lui qui a servi à les établir !) mais leur utilisation pour l'interprétation d'autres phénomènes non linéaires risque de conduire à des résultats erronés.

La Fig. 16.2 représente l'effet électroélastique dû à un champ appliqué parallèlement à la plaque suivant l'axe a_1' tandis que la Fig. 16.3 correspond à un champ appliqué suivant a_3' . Ces courbes résultant de l'application de la relation (15.27) montrent que l'effet dû à un champ parallèle présente des valeurs extrêmes beaucoup plus élevées que dans le cas du champ normal (voir tableau 16.C). Cette remarque permettra de fournir une explication à certains phénomènes observés lors de l'étude de la diffusion (§26).

Afin de mieux apprécier l'effet de l'incertitude attachée aux coefficients électroélastiques, les courbes $\theta = 0$ de la Fig. 16.1 ont été reprises sur la Fig. 16.4 et encadrées par les courbes correspondant aux valeurs extrêmes de l'erreur sur les coefficients (cf. tableau 16.A).

Une partie des données expérimentales ayant servi au calcul des coefficients est également représentée sur la Fig. 16.4 et une autre partie sur la Fig. 16.5 avec la courbe calculée correspondante.

Tableau 16.C

Intensité de l'effet électroélastique suivant l'orientation du champ électrique pour les trois modes de vibration d'une plaque coupe FC

Mode	C	B	A
$\vec{E}$ normal	- 2,85	3,17	1,84
$\vec{E} \parallel \vec{a}'_1$	-31,4	17,4	-317
$\vec{E} \parallel \vec{a}'_3$	168	81,9	- 70,2

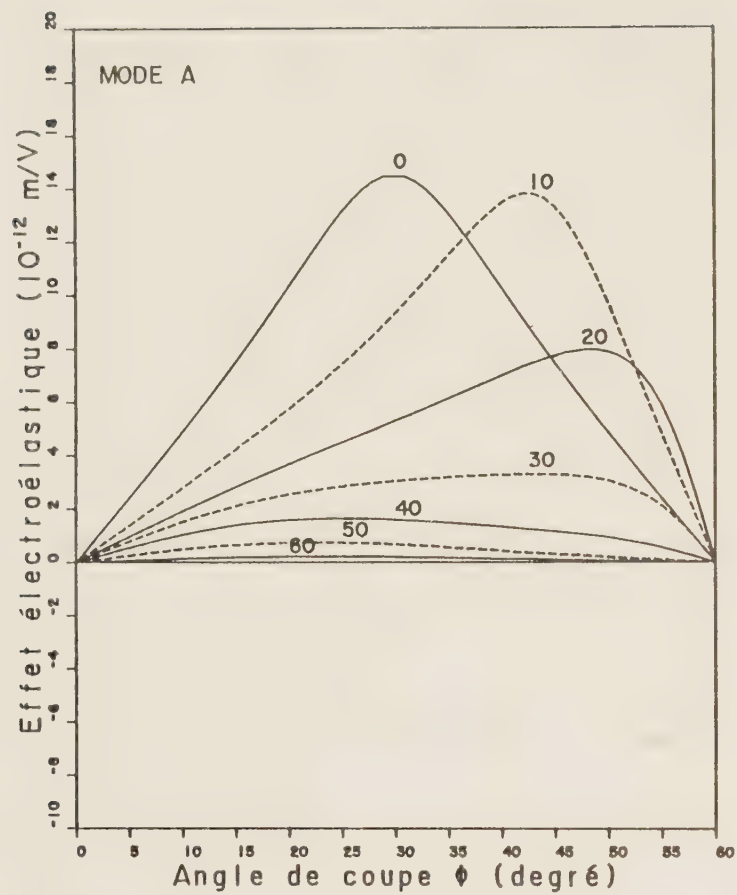


Fig. 16.1 (a)

voir légende page
suivante

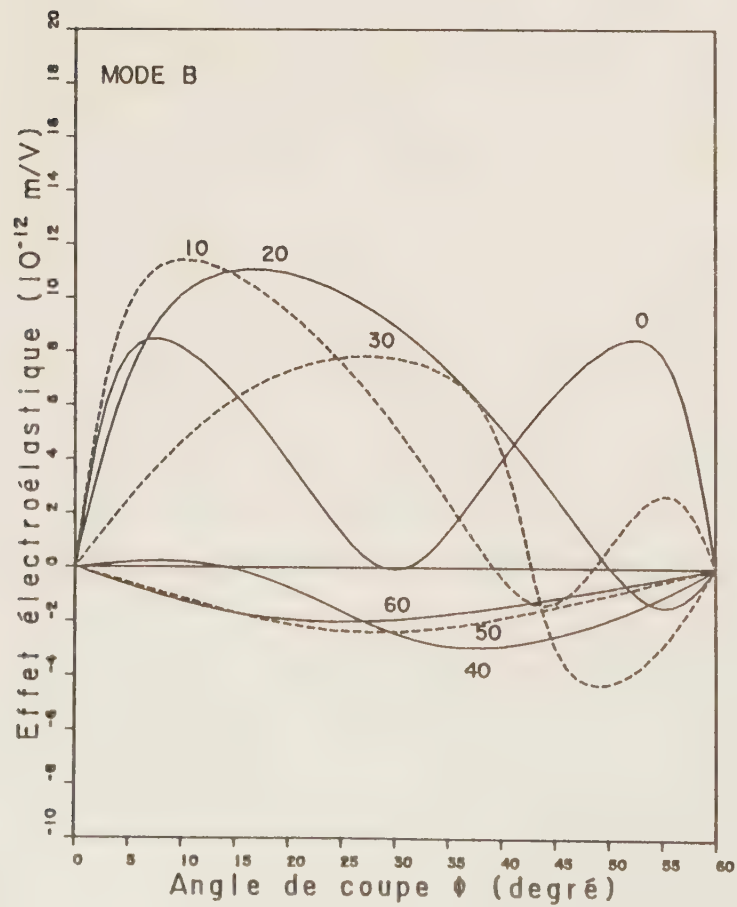


Fig. 16.1 (b)

voir légende page
suivante

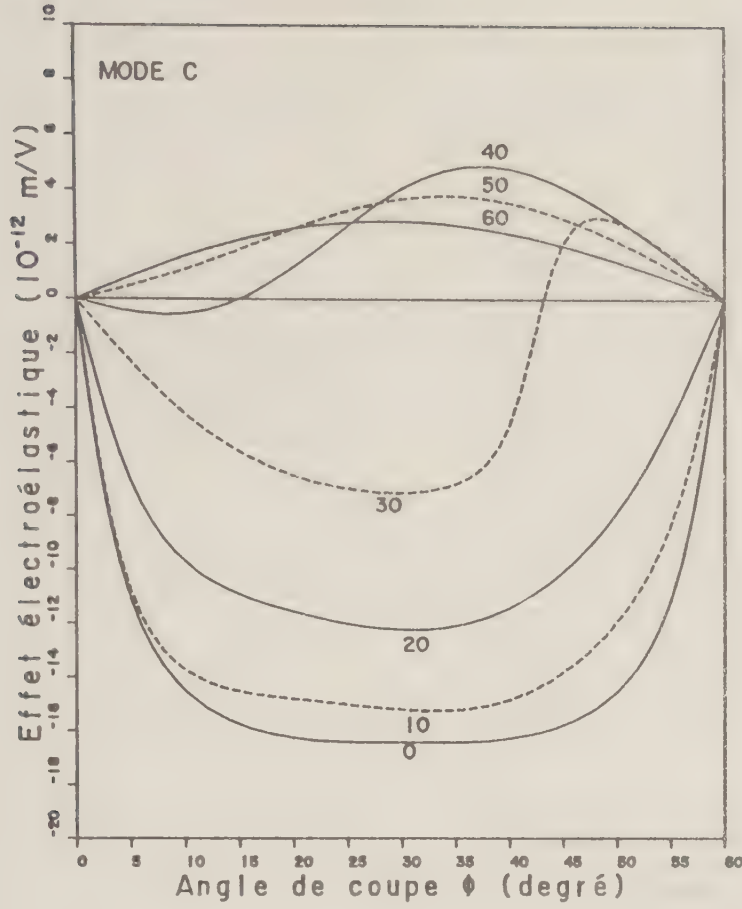


Fig. 16.1 (c)

Fig. 16.1 : Cartes de l'effet électroélastique $\left(\frac{\Delta\omega}{\omega E}\right)$ en fonction de l'angle de coupe ϕ paramétré par l'angle θ indiqué en degré pour les trois modes de vibration. Le champ électrique est dirigé normalement à la plaque.

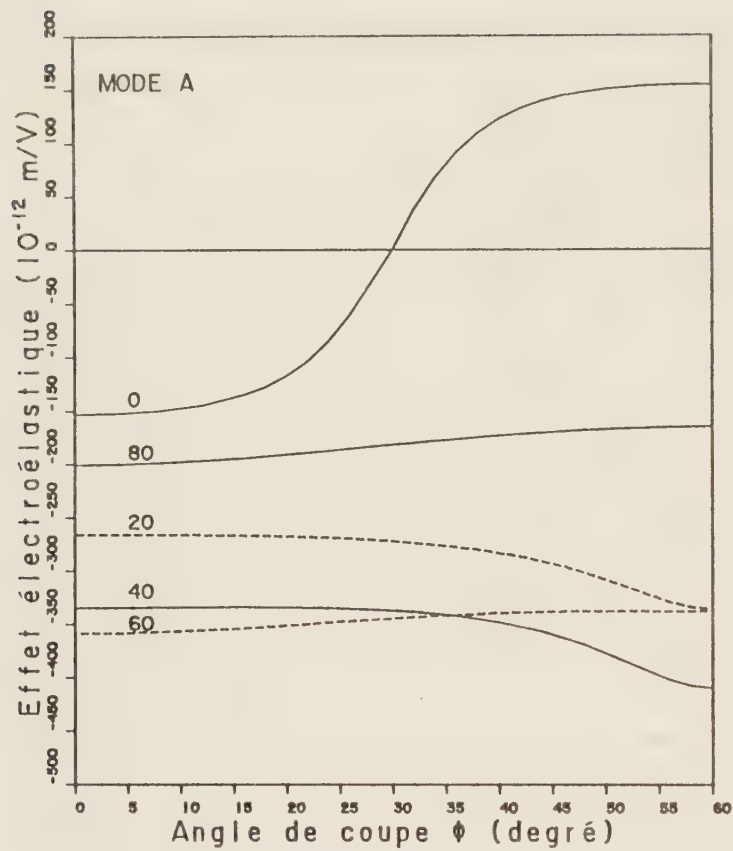


Fig. 16.2 (a)

voir légende
page suivante

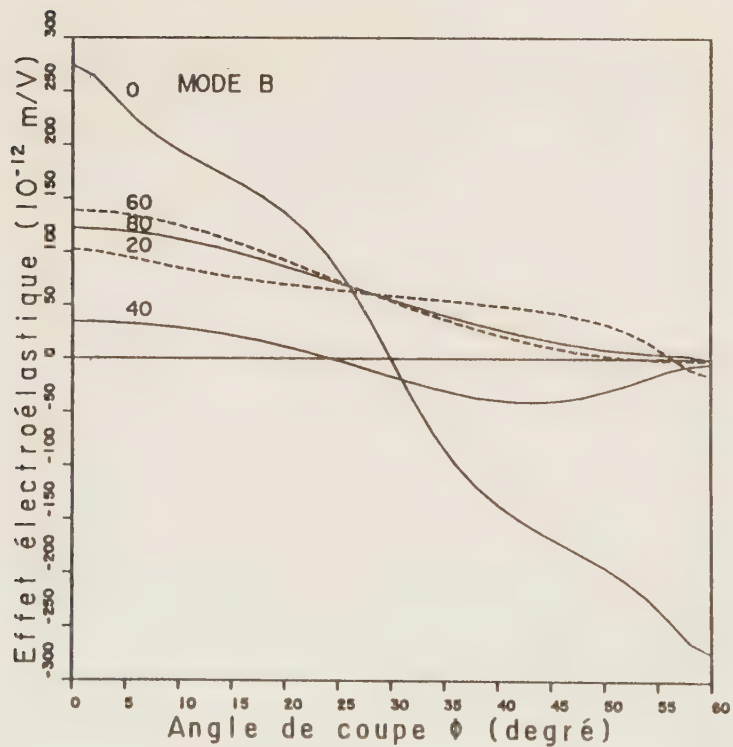


Fig. 16.2 (b)

voir légende
page suivante

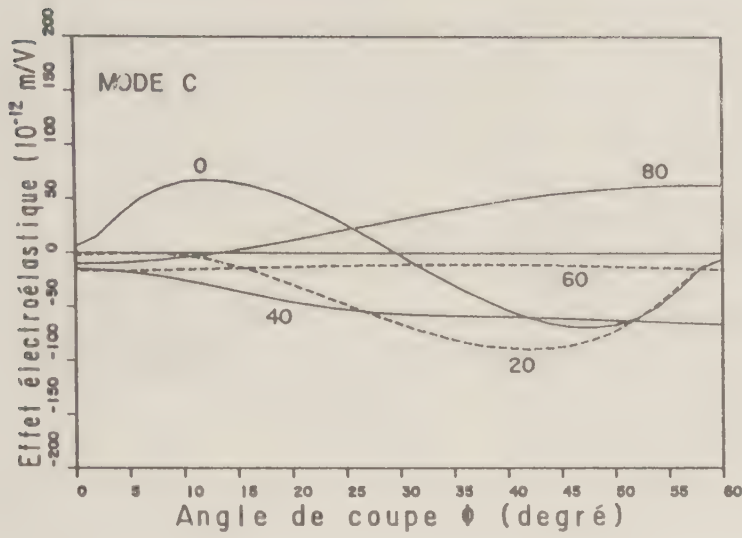


Fig. 16.2 (c)

Fig. 16.2 : Cartes de l'effet électroélastique pour les trois modes de vibration pour un champ appliqué parallèlement à la plaque suivant l'axe a'_1

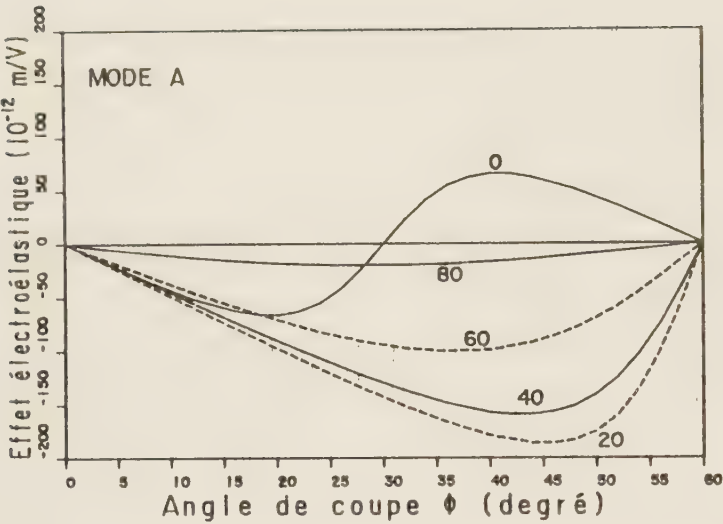


Fig. 16.3 (a)
voir légende
page suivante

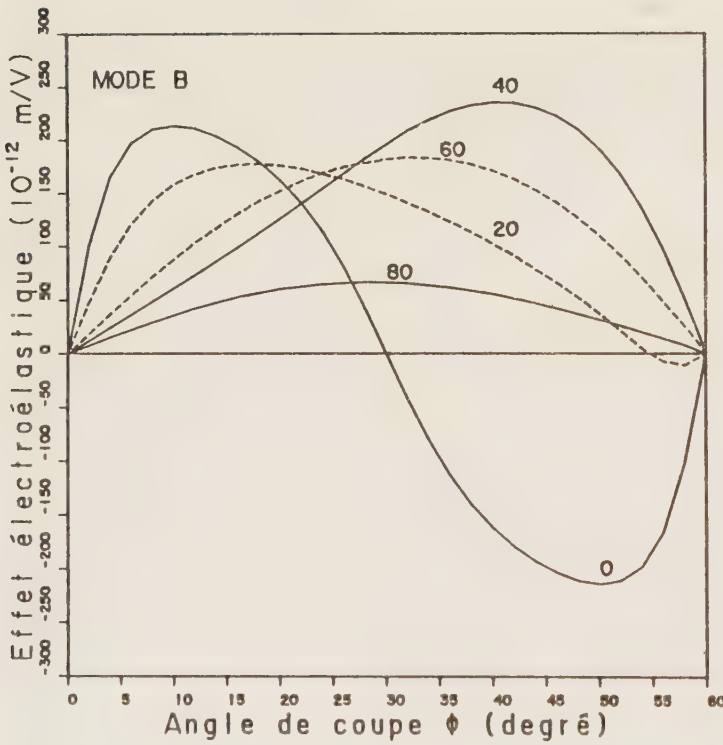


Fig. 16.3 (b)
voir légende
page suivante

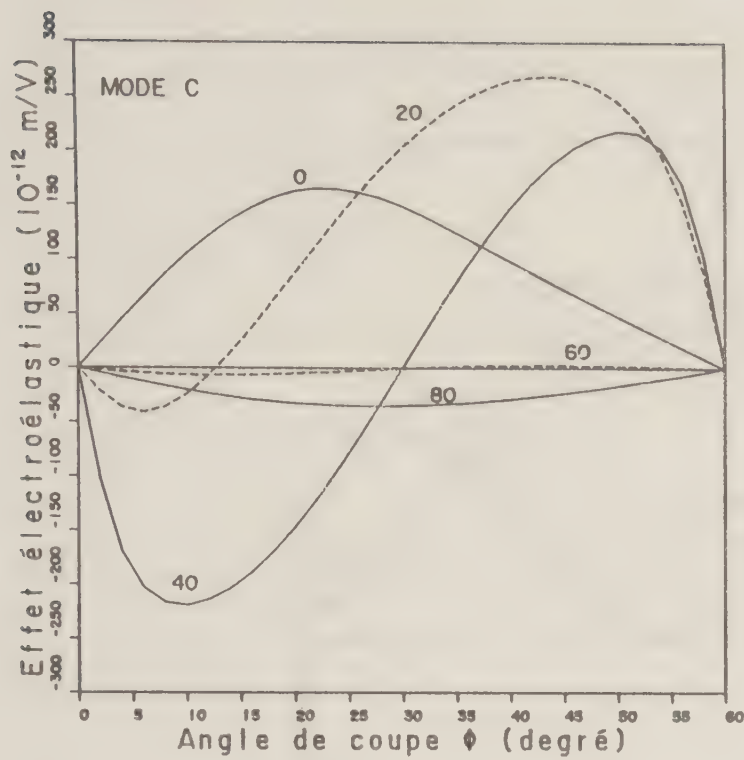


Fig. 16.3 (c)

Fig. 16.3 : Cartes de l'effet électroélastique pour les trois modes de vibration pour un champ appliqué parallèlement à la plaque suivant l'axe a'_3

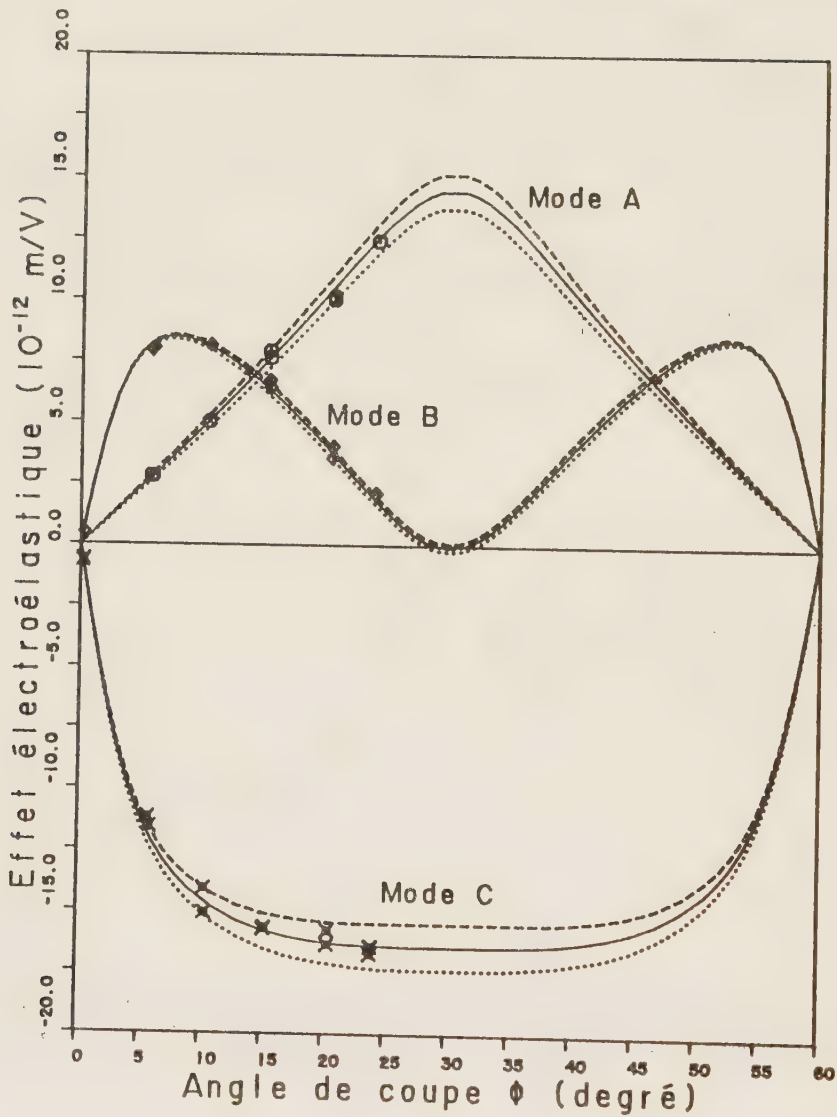


Fig. 16.4 : Carte montrant l'effet de l'incertitude sur le calcul des coefficients ; les courbes supérieures et inférieures encadrant la courbe moyenne correspondent aux valeurs extrêmes possibles des coefficients (voir tableau 16.A).

Les données expérimentales ayant servi au calcul de l'effet électroélastique sont également représentées pour les trois modes de vibration ($\theta = 0$).

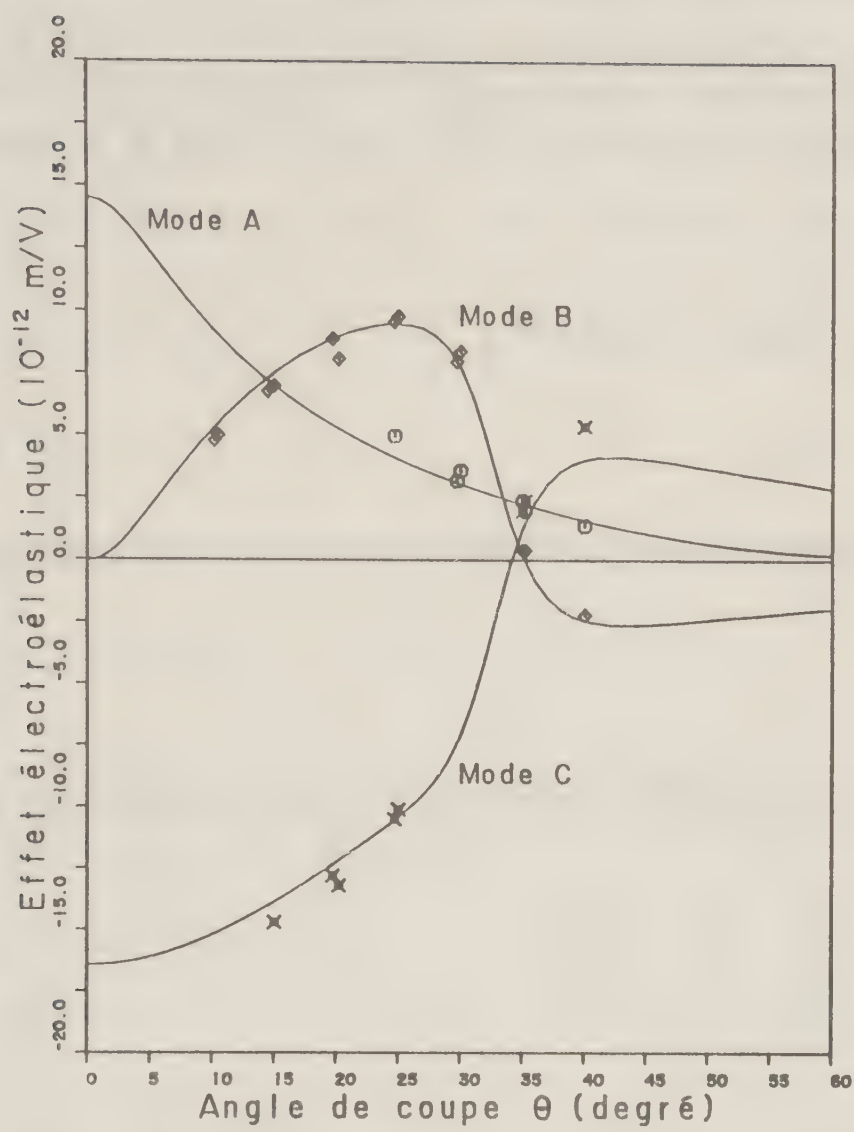


Fig. 16.5 : Comparaison entre données expérimentales et courbe calculée de l'effet électroélastique pour les trois modes de vibration ($\phi = -90^{\circ}$)

16.4. Coefficients phénoménologiques et matériels

Le calcul de la prédéformation statique effectué au §12.5 a permis d'établir la relation entre gradients de déplacements et de potentiel (cf. relations (12.28) et (12.29)). Cette relation s'écrit dans le repère de la plaque :

$$\frac{\partial \bar{u}'_m}{\partial a'_2} = - \sigma'_m \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial a'_2} \quad (16.13)$$

ou encore dans le repère de référence :

$$\frac{\partial \bar{u}_m}{\partial a_n} = - \sigma_m \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial a_n} = \sigma_m E_n \quad (16.14)$$

On peut montrer que sous cette forme les composantes σ_m sont données par les relations :

$$\sigma_m = \frac{\Delta_m}{\Delta_0} \quad (16.15)$$

A l'aide des notations du §13.3 (relations (13.23) et (13.24)) Δ_0 et Δ_m s'écrivent :

$$\Delta_0 = \det(\Gamma_{ik}) = \begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{vmatrix} \quad (16.16)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \gamma_2 & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \gamma_3 & \Gamma_{23} & \Gamma_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \gamma_1 & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \gamma_2 & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \gamma_3 & \Gamma_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \gamma_1 \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \gamma_2 \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \gamma_3 \end{vmatrix} \quad (16.17)$$

En reportant la relation (16.14) dans la relation (11.9) donnant $\hat{C}_{ijkl}$ et en dérivant le résultat obtenu par rapport au champ électrique E_n , on peut exprimer les coefficients phénoménologiques δ_{ijkln} en fonction des coefficients matériels (cf. (11.12)) :

$$\delta_{ijkln} = \frac{\partial \hat{C}_{ijkl}}{\partial E_n} = \sigma_m (C_{ilmn} \delta_{kj} + C_{ijnl} \delta_{mk} + C_{inkl} \delta_{mj} + C_{ijklmn}) - (e_{n.il} \delta_{kj} + e_{n.ijkl}) \quad (16.18)$$

Le résultat montre que non seulement ces coefficients ne présentent pas les symétries requises, comme le prouvent les quelques exemples ci-dessous, mais qu'ils dépendent en plus de l'orientation de l'échantillon puisque σ_m s'exprime, par l'intermédiaire des composantes γ_k et Γ_{ik} , en fonction de la normale $\vec{n}$ à la plaque (cf. (13.23) et (13.24)). Ce fait rend d'ailleurs pratiquement impossible la confrontation numérique des coefficients matériels et phénoménologiques puisque ceux-ci ont été calculés à partir de coupes très variées. Ainsi, pour une coupe d'orientation initiale (yx) (cf. annexe B) pour laquelle $\vec{n} = (0,1,0)$, on trouve :

$$\sigma_1 = \frac{-2e_{1.1}}{C_{11} - C_{12}}, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (16.19)$$

tandis que pour une coupe X, (yxw)_{90°} pour laquelle $\vec{n} = (-1,0,0)$ on trouve :

$$\sigma_1 = \frac{e_{1.1}}{C_{11}}, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (16.20)$$

Le calcul de quelques composantes particulières montrent que les symétries thermodynamiques ne sont pas respectées par les coefficients phénoménologiques, on devrait avoir (cf. tableau 7.A) :

$$\delta_{ijkln} = \delta_{jikln} = \delta_{klijn} \quad \text{etc.} \quad (16.21)$$

or on trouve par exemple :

$$\begin{aligned} \delta_{13111} &= \sigma_1 (C_{14} + C_{114}) - e_{1.14} \\ \delta_{31111} &= \sigma_1 (3C_{14} + C_{114}) - e_{1.14} \\ \delta_{11131} &= \sigma_1 (3C_{14} + C_{114}) - e_{1.14} \\ &\text{etc.} \end{aligned} \quad (16.22)$$

De même pour les symétries cristallines : le coefficient δ_{11113} qui devrait être nul vaut en fait :

$$\delta_{11113} = \sigma_1 (3C_{14} + C_{114}) \quad (16.23)$$

Ces quelques exemples justifient la mise en garde du §11.3 sur l'utilisation de ces coefficients avec un modèle différent de celui qui a servi à leur calcul.

CHAPITRE 6

LES IMPURETES DANS LE QUARTZ

La première partie de ce mémoire était consacrée à l'étude de l'effet électroélastique proprement dit à l'issue de laquelle la relation entre variation de fréquence et répartition du potentiel dans le résonateur a été établie.

L'analyse de la diffusion des impuretés permet de déterminer la répartition du potentiel dans le cristal. Cette étude constitue la seconde partie de ce mémoire qui débute avec ce chapitre, essentiellement bibliographique, consacré à la description des particularités structurales du quartz, des impuretés qu'il contient ainsi qu'aux méthodes mises en oeuvre pour déterminer leur nature et leur concentration.

La relaxation en champ fort étudiée dans ce mémoire est brièvement introduite parmi les techniques d'analyse. Les résultats importants, généralement résumés dans des tableaux, sont destinés à mieux situer la relaxation en champ fort et à estimer par comparaison la valeur des renseignements obtenus par cette méthode.

17. RAPPELS SUR LA STRUCTURE ET LA COMPOSITION DU QUARTZ

17.1. Structure cristalline [FRONDEL,1962,p.9]

Le quartz α appartient au groupe ponctuel 32 ou classe trigonale trapézoédrale du système trigonal (cf. Annexe C). Ses éléments de symétrie sont un axe d'ordre 3 (axe c, axe Z ou axe optique) et trois axes d'ordre 2 (axes a, axes X ou axes électriques) situés à 120° l'un de l'autre dans un plan perpendiculaire à c.

La structure atomique consiste en un assemblage de tétraèdres formés d'un atome de silicium environné de 4 atomes d'oxygène, chaque oxygène étant commun à deux tétraèdres.

L'association de ces tétraèdres SiO_4 forme des hélices autour d'axes parallèles à l'axe optique, le sens de ces hélices définissant l'énantiomorphisme du quartz : à des hélices à droite correspond du quartz gauche et réciproquement [PASCAL,1965,p.52], [FRONDEL,1962,p.13].

Contrairement aux cristaux ioniques où l'assemblage des ions est très compact, la nature en partie covalente des liaisons dans le quartz confère à ce cristal une structure relativement ouverte dans laquelle apparaissent des canaux parallèles à l'axe Z (cf. Fig. 17.1) et d'autres plus étroits parallèles à l'axe X ou à d'autres directions [WENDEN,1957], [AYENSU,1977], [HARRIS,1937]. Cette particularité influe considérablement sur la nature et la structure des défauts ponctuels dans le quartz.

17.2. Les impuretés dans le quartz

Dans le cadre de ce travail, l'étude des défauts ponctuels dans le quartz sera restreinte à ceux que l'on rencontre dans les cristaux dont la qualité est suffisante pour en faire des résonateurs. Dans le quartz naturel on admet qu'en moyenne 2 % seulement du matériau peut être utilisé à cette fin [KATS,1962]. Les progrès réalisés dans la fabrication du quartz synthétique dont la croissance et la qualité peuvent être en partie maîtrisées augmentent notablement cette proportion de sorte que les cristaux de synthèse sont de plus en plus employés dans la fabrication des résonateurs.

Il n'en reste pas moins que les régions les plus pures des meilleurs cristaux contiennent des impuretés qui peuvent nuire à la qualité métrologique des résonateurs. Parmi celles-ci les ions alcalins monovalents jouent un rôle prédominant.

Le mécanisme le plus souvent invoqué pour expliquer la présence d'impuretés ioniques dans le quartz (naturel ou synthétique) est le suivant [KATS, 1962] : lors de la croissance du cristal certains atomes de silicium sont remplacés par des atomes d'aluminium légèrement plus gros (cf. Fig. 17.1). Ces ions substitutionnels, étroitement liés au réseau cristallin, ne peuvent pratiquement pas se déplacer et agissent du point de vue électrostatique comme des charges négatives fixes puisqu'un atome tétravalent (Si^{4+}) a été remplacé par un atome trivalent (Al^{3+}). La conservation de l'équilibre électrique du cristal nécessite la présence d'une charge positive qui peut être :

- soit un cation monovalent Li^+ , Na^+ , K^+ ou dans une moindre mesure Cu^+ , Ag^+ , etc., ces atomes se trouvant en position interstitielle au voisinage de l'ion Al^{3+} dans les canaux évoqués au paragraphe précédent créant ainsi un centre appelé Al-M^+ ,
- soit un proton H^+ dont la liaison avec l'un des oxygènes voisins de l'ion aluminium forme une molécule OH^- (centre Al-OH^-) [HALLIBURTON, 1980].
- la compensation de la charge manquante peut également s'effectuer par la création d'un trou à la suite d'une exposition à des radiations ionisantes ou d'une électrolyse à haute température donnant lieu à la formation d'un centre Al-e^+ [WEIL, 1973 ou 1975] ; ces derniers centres disparaissent si l'on chauffe le cristal au dessus de 350°C [GRIFFITHS, 1954, 1955].

La présence de bore, de fer et de magnésium est en outre fréquemment signalée [DENNEN, 1966] mais ne semble pas affecter de manière évidente la qualité métrologique du cristal.

Du point de vue quantitatif, la concentration d'impuretés dépend de la nature du cristal (naturel ou synthétique), des conditions de croissance et de la localisation de l'échantillon dans le cristal [BAMBAUER, 1961]. Le tableau 17.A résume quelques chiffres publiés au cours des 20 dernières années, les concentrations sont données en nombre d'atomes d'impureté par million d'atomes de silicium (ppm Si).

Ce tableau est destiné uniquement à donner une idée de l'ordre de grandeur, de la dispersion possible des concentrations et de la nature des impuretés.

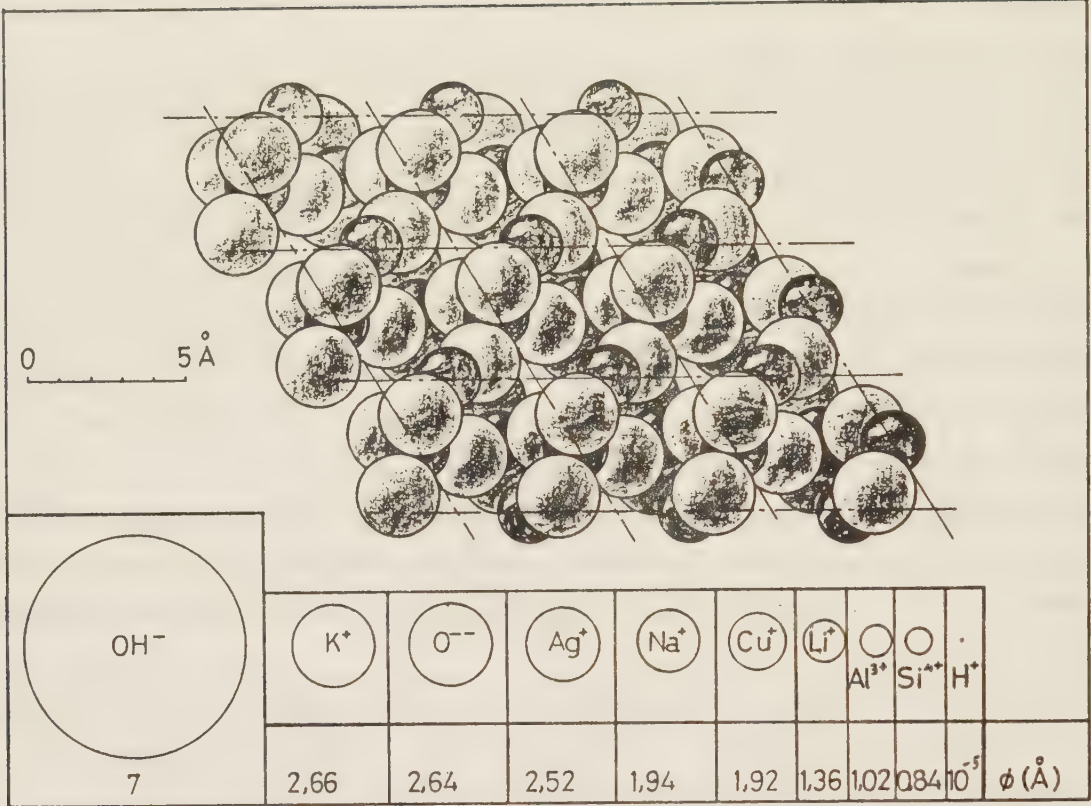


Fig. 17.1 : Réseau cristallin du quartz gauche vu suivant l'axe optique (axe Z). Les ions silicium ont été exagérés de manière à être visibles (voir taille réelle sur l'encadré inférieur).

Remarquer la présence des canaux parallèles à l'axe Z dans lesquels peuvent migrer des ions interstitiels. Certains de ces ions ainsi que les ions constitutifs du quartz sont également représentés.

On s'aperçoit que les concentrations d'impuretés varient en moyenne de quelques ppm Si à quelques centaines de ppm Si soit de quelques 10^{17} à quelques 10^{19} atomes /cm³.

Il faut noter qu'il est en outre possible d'introduire, de remplacer ou de modifier la concentration des impuretés dans le cristal, soit au moment de la croissance [LAUDISE,1965], soit par diffusion [RYBACH,1967]. Ce dernier procédé étant fréquemment utilisé pour éliminer du cristal des impuretés nuisibles à la qualité métrologique (sweeping) [MARTIN,1982].

Tableau 17.A
Concentrations d'impuretés dans le quartz (p.p.m. Si)

Référence	Al	Li	Na	K	H	Fe	Nature du cristal	Procédé utilisé	Observation
[BAMBAUER, 1961]	30-140 moy: 82	10-105 moy: 45	<2-30 moy: <6		<1-55 moy: 16		Naturel (Alpes)	Analyse chimique	Valeurs concernant une quarantaine d'échantillons
	353	165	<0,4		188	<0,4	Naturel (Brésil)	Spectrophotométrie de flamme	Valeurs typiques
[KATS, 1962]	164	118	53		26,4		Synthétique (Bell)		
	110	40	21	64	19		Synthétique (Mossbach Inst.)	pour les ions alcalins	
[KREFFT, 1975]		44	10	1			Naturel (Brésil)	Analyse chimique	Seuls les alcalins ont été recherchés
		137	16	3			Naturel (Brésil)		
		68	7	3			Naturel (Chili)		
		18	17	4			Naturel (Chili)		
		191	9,2	2,3			Naturel (Birmanie)		
		25	20	1			Naturel (Madagascar)		
[BRICE, 1978]	1-10	2-30	1-10	0,1-0,6	200-900	<0,03-0,3	Synthétique	Spectrométrie de masse	Valeurs moyennes sur un grand nombre d'échantillons provenant de différents fournisseurs

18. METHODES D'INVESTIGATION

Outre les procédés traditionnels (analyse chimique, spectrophotométrie, spectrométrie de masse,...) un nombre considérable de méthodes a été utilisé pour déterminer la concentration et la nature des impuretés contenues dans le quartz. Quelques unes de ces méthodes parmi les plus utilisées seront brièvement décrites afin de mieux situer la technique de relaxation en champ fort qui fait l'objet de ce travail.

18.1. Mesure de conductivité

Les premières mesures de conductivité ont été effectuées par Jacques Curie à la fin du siècle dernier [CURIE, 1886 ou 1889]. Dès cette époque, le comportement particulier du quartz a été souligné et de nombreux travaux ont mis en évidence le caractère électrolytique de la conductivité du quartz. Les constantes de diffusion de différents ions monovalents parallèlement à l'axe c ont ainsi pu être déterminées (cf. tableau 18.A). Il est à noter que les ions plurivalents ne diffusent pratiquement pas [MILNE, 1964], [GIBSON, 1950].

La nature ionique de la conductivité du quartz est confirmée par la grande dispersion de cette valeur en fonction des échantillons et par l'importante anisotropie qu'elle présente : le rapport entre les résistivités mesurées perpendiculairement et parallèlement à l'axe c peut varier entre 10^2 et 10^6 [WENDEN, 1957].

La différence de conductivité du quartz en fonction de la nature des impuretés est actuellement utilisée industriellement pour le "balayage" des cristaux. Le "balayage" (ou "sweeping") consiste à appliquer un champ électrique intense sur le cristal chauffé en atmosphère contrôlée, on constate après ce traitement une diminution sensible de sa conductivité [LIPSON, 1981]. Cette modification est due au remplacement de certaines impuretés alcalines par des protons H^+ , les centres $Al-M^+$ étant alors remplacés par des centres $Al-OH^-$ beaucoup moins mobiles [NOWICK, 1980].

Le balayage peut consister aussi à introduire des impuretés déterminées (atomes de lithium par exemple) afin d'occuper les sites vacants avant qu'ils ne le soient par des impuretés plus indésirables (protons H^+ par exemple).

Tableau 18.A

Coefficients de diffusion de certains ions monovalents $D = D_0 \exp(-W_m/kT)$

Référence	Méthode utilisée	Temperature (°C)	Ion	D_0 ($10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$)	W_m (eV)	Observation
[VERHOOGEN, 1952]	Conductivité électrique $\parallel$ c champ appliqué : 350 à 1 750 V/cm	300 - 500	Li ⁺	6,9	0,89	
			Na ⁺	3,6	1,04	
			K ⁺	180	1,37	
[VANFLEET, 1963]	Conductivité électrique $\parallel$ c champ : 12,5 V/cm	300 - 560	Ag ⁺		1,65	
[WHITE, 1971]	Conductivité électrique $\parallel$ c champ : 1 000 V/cm	400 - 500	OH ⁻		0,56	
[FRISHAT, 1970]	Traceur radioactif $\parallel$ c	300 - 570	Na ⁺	680	0,87	
	Traceur radioactif $\perp$ c	440 - 570	Na ⁺	$\sim 2\ 000$	1,78	
[RYBACH, 1967]	Diffusion $\parallel$ c sous l'effet d'un gradient de concentration + analyse par absorption IR et activation neutronique	400 - 1 000	Na ⁺	38	1,06*	* Valeur obtenue à partir des résultats de [VOGEL, 1950]

Inversement, des mesures effectuées sur du quartz exposé à des radiations ionisantes (rayons X ou γ) montrent qu'après un rapide phénomène transitoire (quelques dizaines de ns) dû aux paires électron-trou créées par l'irradiation, la conductivité atteint une valeur pouvant atteindre 10^5 fois la valeur précédant l'exposition [JAIN,1982] pour tendre à nouveau vers sa valeur initiale d'autant moins rapidement que la température est plus basse (plusieurs dizaines d'heures à la température ambiante). On attribue ce comportement au fait que le rayonnement fournit assez d'énergie pour dissocier le centre Al-M^+ , la charge vacante, alors compensée par un trou, forme un nouveau centre Al-e^+ et les ions M^+ libérés migrent plus facilement dans le cristal [HUGHES,1973 ou 1975].

18.2. Traceurs radioactifs

Cette méthode a été mise en oeuvre essentiellement par [FRISCHAT,1969,1970,1971,1972] qui a pu déterminer l'énergie d'activation et le coefficient de diffusion sous l'effet d'un gradient de concentration en mesurant l'activité résiduelle du rayonnement γ au cours de la diffusion du traceur radioactif ^{22}Na . Le tableau 18.A résume les résultats obtenus pour la diffusion du sodium parallèlement et perpendiculairement à l'axe c.

18.3. Absorption infra-rouge

Le quartz présente de nombreuses raies d'absorption dans la gamme des nombres d'onde comprise entre 3 200 et 3 700 cm^{-1} [KATS,1962], pour que ces raies soient bien résolues les mesures sont généralement effectuées à basse température (77K). Certains de ces pics sont attribués aux vibrations du réseau cristallin (3 200, 3 300 cm^{-1}) tandis que la plupart des autres sont associés aux vibrations de l'ion hydroxyle OH^- dont les différentes configurations possibles dans le réseau engendrent différentes raies d'absorption.

Cette particularité a été mise à profit pour l'identification des impuretés contenues dans le cristal [WOOD,1960]. [KATS,1962] a ainsi pu montrer que l'association OH^- - Li^+ engendre un pic à 3 400 cm^{-1} , tandis que l'association OH^- - K^+ est responsable d'un pic à 3 581 cm^{-1} , l'association OH^- - Al^{3+} provoquant l'apparition de deux pics à 3 306 et 3 367 cm^{-1} .

De très nombreuses expériences d'absorption infrarouge ont été conduites pour évaluer l'effet de certains traitements :

- irradiation [MITCHELL,1957], [BROWN,1975], [SIBLEY,1979]
 - électrolyse à haute température [KREFFT,1975], [LIPSON,1978,1981]
- ou pour estimer la concentration d'impuretés contenue dans le cristal [BRICE,1978], [SAWYER,1972], [PATERSON,1982] ou encore pour estimer quel sera le coefficient de qualité des résonateurs fabriqués avec le cristal analysé [FRASER,1966], [SAWYER,1972].

18.4. Absorption optique et luminescence

Des cristaux de quartz irradiés (rayons X, γ , ...) peuvent présenter selon l'origine du cristal, la température et la nature du rayonnement, diverses colorations correspondant à une absorption de lumière à des longueurs d'onde comprises entre 145 et 1 000 nm (8,5 et 1,2 eV) [ARNOLD,1960], [NASSAU,1975], [MITCHELL,1955,1956]. Ce phénomène est généralement attribué à la formation de centres colorés Al-e⁺ ou Ge-e⁺ associés à diverses impuretés [HAVEN,1966], [COHEN,1956,1958,1960], [PAIGE,1957]. Le brunissement du quartz après irradiation aux rayons X a d'ailleurs été utilisé pour déterminer la distribution des impuretés dans le cristal [BROWN,1952,1960], [COHEN,1968].

Les cristaux ainsi altérés retrouvent leur structure initiale à la suite d'un recuit convenable, ce processus s'accompagnant généralement d'une émission de lumière à une longueur d'onde et à une température caractéristiques (thermoluminescence) [BATRAK,1958], [MATTERN,1973], [MEDLIN,1963].

18.5. Résonance paramagnétique

Depuis une trentaine d'années, on sait que le quartz soumis à une irradiation présente un spectre RPE observable à basse température [GRIFFITHS,1954,1955] dû à la formation de centres Al-e⁺ [O'BRIEN,1955] ; de nombreuses études ont été réalisées pour préciser la structure de ces centres [MACKEY,1970], [WEAVER,1964] et tenter d'établir une corrélation entre les spectres RPE et les bandes d'absorption optique [WEEKS,1970], [NASSAU,1975] ou d'absorption infrarouge [HALLIBURTON,1981].

La résonance paramagnétique a permis en outre la mise en évidence de nombreux autres types de défauts ponctuels donnant lieu à la formation de centres paramagnétiques après irradiation : présence de germanium ou de titane substitutionnels [ANDERSON, 1959], [MACKEY, 1963], [ISOYA, 1978], [RINNEBERG, 1972], [GRISCOM, 1979] ou lacunes d'oxygène [WEEKS, 1956, 1963], [YIP, 1975], [HALLIBURTON, 1979], [FEIGL, 1974].

18.6. Relaxation diélectrique

La présence de défauts ponctuels dans un cristal engendre des pertes diélectriques caractérisées par le déphasage δ entre les vecteurs polarisation et champ électrique. La tangente de l'angle de perte est donnée par la relation de Debye [DANIEL, 1967, ch.2] :

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\Delta \epsilon \omega \tau}{\epsilon (1 + \omega^2 \tau^2)} \quad (18.1)$$

dans laquelle :

$\Delta \epsilon$ est la constante de relaxation diélectrique caractéristique du cristal et des impuretés qu'il contient

ϵ est la permittivité haute fréquence du cristal

ω la fréquence angulaire du champ électrique

τ le temps de relaxation dont la valeur dépend de la température suivant une loi de type Arrhenius [PARK, 1974] :

$$\tau = \tau_0 \exp(H/kT) \quad (18.2)$$

avec :

τ_0 constante de temps

H énergie d'activation dépendant essentiellement de la nature de l'impureté et de sa localisation dans le réseau.

Lorsque l'on maintient la fréquence ω constante et que l'on fait varier T de la température de l'hélium liquide à la valeur ambiante, la fonction $\operatorname{tg} \delta$ présente des pics à diverses températures [VOLGER, 1955].

L'étude de ces pics : amplitude, largeur, évolution de la position en fonction de divers traitements tels que l'électrolyse ou l'irradiation, a permis d'identifier avec certitude certaines impuretés [STEVENS, 1962, 1963], [DE VOS, 1967, 1970, 1971] et de déterminer les énergies d'activation caractéristiques [SNOW, 1964]. [NOWICK, 1969] établit une corrélation entre les pics de relaxation diélectriques, de pertes acoustiques et d'absorption infrarouge.

18.7. Pertes acoustiques (relaxation anélastique)

Aucune des méthodes décrites jusqu'ici n'utilise les propriétés piézoélectriques du quartz. La méthode des pertes acoustiques, au contraire, consiste à déterminer l'influence des impuretés sur le coefficient de qualité des résonateurs fabriqués avec le quartz étudié [COOK,1953].

Dans son principe, cette méthode diffère peu de celle des pertes diélectriques, la relation donnant les pertes acoustiques (c'est-à-dire l'inverse du coefficient de qualité du résonateur) étant formellement identique à la relation (18.1) [FRASER,1968] :

$$Q^{-1} = D \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (18.3)$$

où l'intensité de relaxation anélastique D est caractéristique du matériau et de l'impureté considérés tandis que le temps de relaxation τ suit une loi identique à (18.2).

Expérimentalement on procède de la même façon que précédemment : la fréquence de résonance du cristal étant fixée, on fait varier la température dans la même gamme que pour les pertes diélectriques et l'on observe des pics de pertes acoustiques à différentes températures [BÖMMEL,1955,1956,1960].

Ces pics de pertes sont caractéristiques de la nature de l'impureté et de sa localisation. En effet, lorsqu'une impureté est "piégée" par un atome d'aluminium par exemple, elle est prisonnière d'un double puits de potentiel (voir Fig. 18.1) mais elle peut passer d'un puits à l'autre par agitation thermique ou même vibrer entre les deux positions d'équilibre à une fréquence caractéristique de la nature de l'impureté et de la température du milieu. Si cette fréquence coïncide avec la fréquence de résonance du cristal, on observe une augmentation des pertes acoustiques due à l'absorption d'énergie par les impuretés, ce qui se traduit expérimentalement par une diminution importante du coefficient de qualité du résonateur (cf. §27).

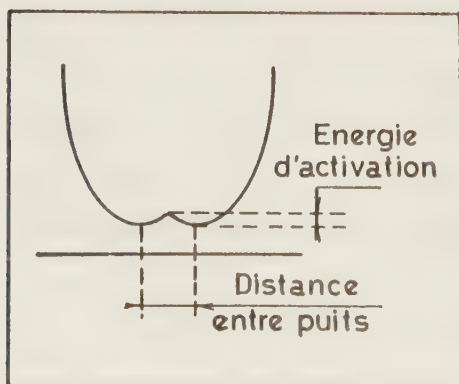


Fig. 18.1

Forme du puits de potentiel au voisinage d'une impureté

En utilisant des cristaux de référence dans lesquels la nature des impuretés était connue, la corrélation représentée sur le tableau 18.B a pu être établie pour des résonateurs vibrant en cisaillement d'épaisseur à 5 MHz partiel 5 [FRASER,1964,1968], [DODD,1965], le premier pic observé à 20K est caractéristique du réseau cristallin lui-même.

Tableau 18.B
Identification des impuretés par les pics de pertes acoustiques
d'après [FRASER,1968] et [DODD,1965]

Température T(K)	Nature	Energie d'activation H (eV)	Constante de temps τ_0 (s)
20	Réseau		
50	Na	0,07	10^{-13}
105	Li	0,11	10^{-13}
135	Na	0,1	10^{-13}
210	K	1,09	10^{-13}
250 - 500	OH	0,71	10^{-13}

De même que pour les pertes diélectriques, l'influence de divers traitements sur l'amplitude et la position des pics de pertes acoustiques a été étudiée [KING,1958,1959], [BALLMAN,1964] et plus récemment pour l'étude de la résistance aux radiations ionisantes [DOHERTY,1980,1982], [MARTIN,1980,1981].

18.8. Variation de fréquence sous l'effet de radiations ionisantes

La sensibilité des propriétés physiques du quartz aux radiations ionisantes constitue un obstacle sérieux à l'utilisation des dispositifs utilisant ce matériau pour les applications spatiales et militaires, en conséquence, un grand nombre d'études ont été entreprises pour expliquer, mesurer et remédier à ce comportement néfaste [FRONDEL,1945].

Dans ce domaine, les impuretés apparaissent encore comme les principales responsables des effets observés, le balayage électrolytique réduisant considérablement la sensibilité des cristaux [CHI,1957], [BELSER,1963], [POLL,1966], [STANLEY,1966].

Diverses expériences ont montré que le sens et l'amplitude du décalage permanent de fréquence dépend de l'origine du quartz (naturel, synthétique, balayé ou non) et de la dose de radiation totale reçue par le cristal [BERG,1969], [FLANAGAN,1969,1974], [CAPONE,1970], [KING,1972,1973,1975], [PELLEGRINI, 1978]. La Fig. 18.2 résume le comportement de différents types de quartz.

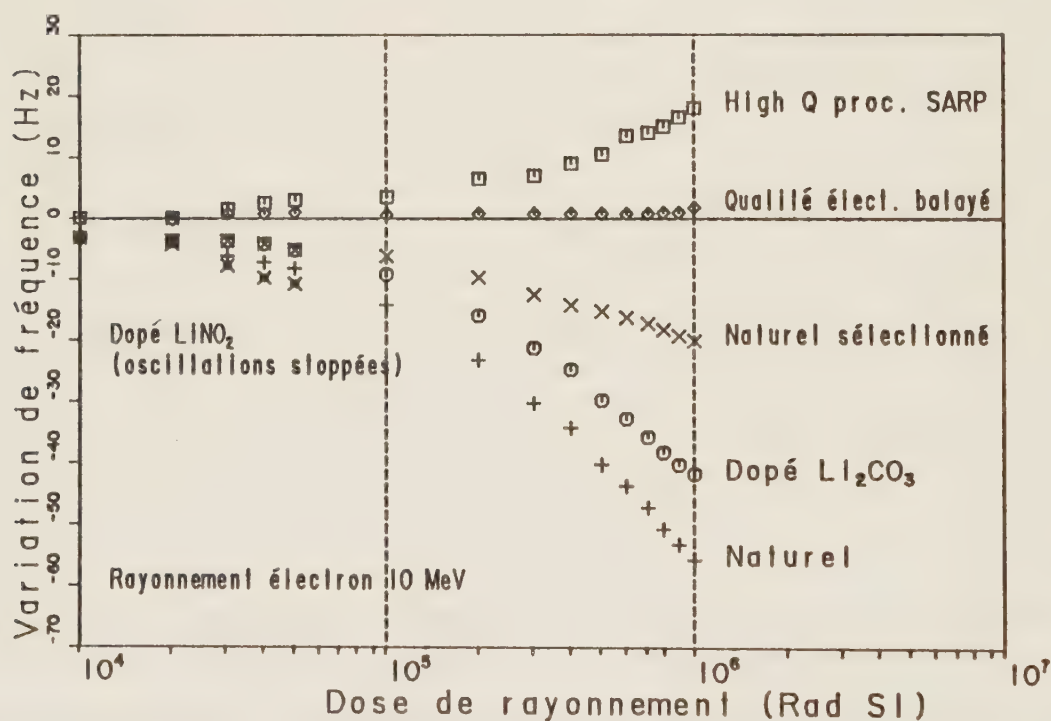


Fig. 18.2 : Décalage permanent de fréquence d'oscillateurs à quartz coupe AT 5 MHz partiel 5 en fonction de la dose de rayonnement reçue d'après [CAPONE,1970]

Outre le décalage permanent de fréquence on observe, dans le cas d'impulsions brèves de radiations, un régime transitoire constitué d'une brusque variation de fréquence suivi d'un retour vers le régime permanent.

Selon les cas, ce comportement est attribué ;

- soit à la libération d'ion H^+ sous l'effet de l'irradiation suivi d'une recombinaison avec les sites où ils étaient initialement piégés [KING,1972], [SOSIN,1975].
- soit au choc thermique provoqué par l'irradiation, suivi d'un retour à l'équilibre de la température [HARTMAN,1973], [YOUNG,1978], [KOEHLER,1979].

La recherche de traitements appropriés pour minimiser l'influence des radiations ionisantes reste un sujet de préoccupation comme le montre le volume des publications consacrées à ce sujet [AOKI,1978], [EULER,1978,1980], [LIPSON,1979].

18.9. Relaxation en champ fort

La mesure précise de l'effet électroélastique a souvent été gênée par le retour quasi exponentiel de la fréquence vers un régime permanent différent de celui du cristal idéalement pur [KUSTERS,1970], [HRUSKA,1977]. La Fig. 18.3 montre l'allure typique de l'effet d'un cycle de tension continue appliqué sur les électrodes d'un résonateur en vibration.

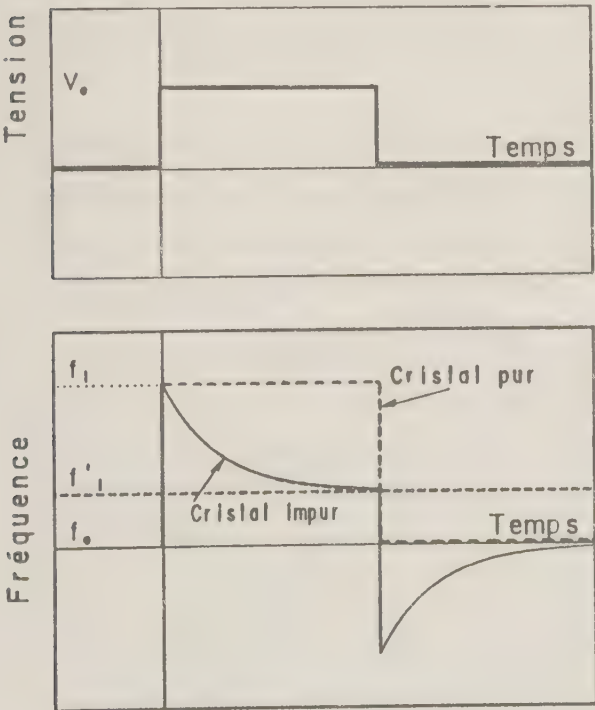


Fig. 18.3
Principe de la relaxation en champ fort : au lieu de conserver la nouvelle valeur f_1 due à l'application du champ électrique, la fréquence du cristal impur tend vers une valeur asymptotique f'_1 à cause de la migration d'impuretés chargées et revient à sa valeur initiale f_0 après suppression du champ appliqué.

Ce phénomène a dès l'origine été attribué à la migration d'impuretés ionisées dans le cristal, leur déplacement modifiant la répartition du potentiel et par conséquent la fréquence du résonateur.

A part les résultats expérimentaux de [KUSTERS,1970], il ne semble pas que cette particularité ait été mise à profit pour obtenir des renseignements sur la nature, la concentration ou le mouvement des impuretés dans le quartz.

La suite de ce travail sera consacrée à l'élaboration du modèle de diffusion permettant de relier le décalage permanent de fréquence à la concentration d'impuretés contenues dans le cristal.

CHAPITRE 7

EFFET DE LA DIFFUSION SUR LA FREQUENCE

Après avoir décrit le modèle utilisé et rappelé les lois générales de la diffusion, on étudie plus particulièrement le régime permanent : la répartition du potentiel dans le modèle choisi obéit à une équation différentielle non linéaire.

Quelques approximations liées à la nature particulière du problème permettent d'établir, dans certaines conditions, une solution analytique. Dans le cas général, la solution est obtenue numériquement.

Connaissant l'expression de la variation de fréquence en fonction de la répartition du potentiel (obtenue à l'issue de la première partie) et la répartition du potentiel en fonction des caractéristiques de la diffusion, on obtient la variation de fréquence en fonction de la concentration d'impuretés, de la tension appliquée et des caractéristiques du milieu considéré.

En faisant appel à la loi de variation de la concentration en fonction de la température, on établit finalement une relation entre la variation de fréquence, la température, l'énergie d'activation et la concentration totale des impuretés contenues dans le cristal.

La technique numérique utilisée pour la résolution de l'équation différentielle non linéaire est classique mais l'approximation analytique est nouvelle de même que les diverses expressions de la variation de fréquence.

19. MODELE DE DIFFUSION UNIDIMENSIONNELLE

19.1. Hypothèses

Partant des connaissances acquises grâce aux diverses méthodes décrites précédemment, on peut considérer que le résonateur à quartz constitue un milieu unidimensionnel (cf. §12.1) dans lequel des charges négatives fixes (les ions Al^{3+} substitutionnels des ions Si^{4+}) sont uniformément réparties. A l'équilibre, ces charges sont compensées par un nombre égal de charges positives (les ions alcalins interstitiels) susceptibles de se mouvoir lors de l'application d'un champ électrique (cf. Fig. 19.1).

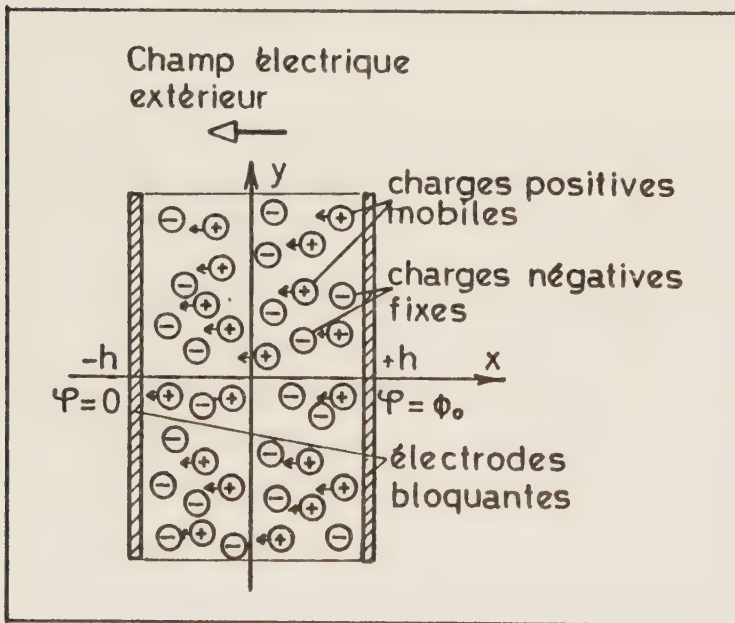


Fig. 19.1

Modèle de diffusion
unidimensionnelle

La mise en équation de ce problème repose en outre sur les hypothèses suivantes :

- a) Il n'y a qu'un seul type d'impureté mobile.
- b) Ces impuretés ne peuvent ni entrer ni quitter le cristal (électrodes bloquantes).
- c) Il n'y a pas de recombinaison.

L'hypothèse b) est justifiée par la nature ionique de la conduction, tandis que c) est autorisée par les faibles concentrations mises en oeuvre.

L'hypothèse a), sans doute la plus discutable, ne joue un rôle qu'au cours du régime transitoire (évolution en fonction du temps). En régime permanent, seul cas étudié ici, c'est la concentration totale des impuretés positives de toutes natures qui intervient, l'hypothèse a) exprime le fait que les impuretés positives mobiles sont traitées dans leur ensemble.

Pour simplifier les notations, l'axe Oa'_2 de la figure 12.1 sera appelé Ox .

19.2. Equation de diffusion (cf par exemple [KITTEL, 1976])

Le milieu décrit au paragraphe précédent est le siège de deux courants :

- un courant de diffusion dû au gradient de concentration (loi de Fick) :

$$\vec{j}_d = -D \vec{\text{grad}}(p_e) \quad (19.1)$$

ce qui dans le cas du milieu unidimensionnel s'écrit :

$$j_d = -D e \frac{\partial p}{\partial x} \quad (19.2)$$

avec :

$j_d = j_d(x, t)$: courant de diffusion

D : constante de diffusion

$p = p(x, t)$: concentration instantanée de charges positives

e : charge élémentaire

- un courant de conduction dû au mouvement des charges dans un champ électrique :

$$\vec{j}_c = p e \mu \vec{E} \quad (19.3)$$

dans laquelle :

$j_c = j_c(x, t)$: courant de conduction

μ : mobilité des charges positives

$E = E(x, t)$: champ électrique local.

Les faibles concentrations d'impuretés permettent d'admettre la relation d'Einstein entre la constante de diffusion D et la mobilité μ [KITTEL, 1976, ch.17] :

$$\mu = \frac{eD}{kT} = \frac{D}{U_T} \quad (19.4)$$

$$U_T = \frac{kT}{e} \quad (19.5)$$

U_T : potentiel thermodynamique

k : constante de Boltzmann

T : température absolue.

Le courant total $j(x,t)$ est la somme des courants de diffusion et de conduction :

$$j = j_c + j_d = eD \left(p \frac{E}{U_T} - \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (19.6)$$

La loi de conservation de l'électricité

$$\frac{\partial(pe)}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 \quad (19.7)$$

s'écrit dans le cas unidimensionnel :

$$e \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0 \quad (19.8)$$

et en remplaçant j par sa valeur (19.6) :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{U_T} \frac{\partial(pE)}{\partial x} \right) \quad (19.9)$$

A cette équation il faut ajouter le théorème de Gauss :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{(p-n_0)e}{\epsilon} \quad (19.10)$$

qui s'écrit ici :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = (p-n_0) \frac{e}{\epsilon} \quad (19.11)$$

n_0 représente la concentration de charges négatives fixes,
 $(p-n_0)e$ représente donc la densité totale instantanée de charge en un point
 du cristal.

ϵ est la permittivité absolue du milieu.

De plus :

$$\vec{E} = - \vec{\text{grad}} \phi \quad (19.12)$$

devient :

$$E = - \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (19.13)$$

$\phi(x,t)$ désigne le potentiel électrique.

19.3. Conditions aux limites

Ces conditions sont imposées par la différence de potentiel appliquée sur les
 électrodes (cf. §12.3) :

$$\phi(-h) = 0 \quad (19.14)$$

$$\phi(+h) = \Phi_0 \quad (19.15)$$

et par la nature bloquante des électrodes : le nombre total de charges posi-
 tives est identique au nombre total de charges négatives. Pour une surface
 unité de cristal on a par conséquent :

$$\int_{-h}^h p \cdot dx = 2hn_0 \quad (19.16)$$

où n_0 représente la concentration uniforme de charges négatives.

19.4. Equation générale

L'étude complète de la répartition des charges, du champ et du potentiel en
 fonction de l'abscisse et du temps représente une tâche considérable qui a
 été abordée par de nombreux chercheurs. On trouvera une bibliographie concer-
 nant ces travaux dans [BARDET, 1978].

Dans le cas général, on ne connaît pas de solution analytique à ce problème. Certaines approximations dont la plus connue est celle de [MOTT,1940] permettent d'obtenir l'expression approchée du courant en fonction de la tension appliquée. Malheureusement, les hypothèses simplificatrices permettant ce type de calcul (cas d'un faible potentiel appliqué) ne sont pas justifiées dans le cas présent.

Des méthodes numériques ont été mises en oeuvre par divers auteurs [DEFORD, 1975], [ORMANCEY,1978], [BARDET,1977,1978]. On trouvera également chez ce dernier une bibliographie traitant de ce sujet.

La présente étude se bornera à envisager le cas stationnaire qui nécessite également, de façon générale, le recours aux techniques numériques mais dont une solution analytique peut être obtenue dans certaines circonstances qui seront précisées.

20. REGIME STATIONNAIRE DE DIFFUSION

20.1. Equations dans le cas stationnaire

La répartition des charges, du champ et du potentiel ne dépend plus du temps et les charges restant à l'intérieur du cristal, le courant total est nul : les équations (19.6), (19.11) et (19.13) deviennent :

$$\frac{pE}{U_T} - \frac{dp}{dx} = 0 \quad (20.1)$$

$$\frac{dE}{dx} = (p - n_0) \frac{e}{\epsilon} \quad (20.2)$$

$$E = - \frac{d\phi}{dx} \quad (20.3)$$

Les conditions aux limites (19.14)-(19.16) restant inchangées.

20.2. Equation du potentiel

L'intégration de (20.1) permet d'établir une relation entre la concentration et le potentiel en un point du cristal [COELHO, 1966] :

$$\int_{p(-h)}^{p(x)} \frac{dp}{p} = \frac{1}{U_T} \int_{-h}^x E dx = \frac{1}{U_T} [\phi(-h) - \phi(x)] \quad (20.4)$$

Compte tenu de (19.4) il reste :

$$p(x) = p(-h) \exp(-\phi(x)/U_T) \quad (20.5)$$

De même, l'intégration de (20.2) entre les limites du cristal permet d'écrire

$$\int_{E(-h)}^{E(+h)} dE = \frac{e}{\epsilon} \int_{-h}^h (p - n_0) dx = \frac{e}{\epsilon} \left(\int_{-h}^h p dx - 2hn_0 \right) \quad (20.6)$$

La conservation de la charge totale (19.16) impose au second membre d'être nul et par conséquent le champ doit être le même aux deux extrémités du cristal :

$$E(-h) = E(+h) \quad (20.7)$$

En éliminant le champ électrique E entre (20.2) et (20.3) et en utilisant la relation (20.5) il vient :

$$\boxed{\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{e}{\epsilon} (n_0 - p(-h) \frac{e}{\epsilon} \exp(-\frac{\phi}{U_T}))} \quad (20.8)$$

Cette équation peut être intégrée une première fois en multipliant les deux membres par $d\phi/dx$, on obtient :

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 = \frac{2eU_T}{\epsilon} p(-h) \exp(-\frac{\phi}{U_T}) + 2 \frac{n_0 e}{\epsilon} (\phi + \phi_1) \quad (20.9)$$

où ϕ_1 est une constante d'intégration.

A l'aide des relations (20.3) et (20.7), cette relation permet de déterminer la valeur de la constante $p(-h)$ en fonction du potentiel appliqué Φ_0 :

$$p(-h) = \frac{n_0 \Phi_0}{U_T [1 - \exp(-\Phi_0/U_T)]} \quad (20.10)$$

L'expression (20.5) de la concentration s'écrit alors :

$$p(x) = \frac{n_0 \Phi_0 \exp(-\phi/U_T)}{U_T [1 - \exp(-\Phi_0/U_T)]} \quad (20.11)$$

20.3. Equations simplifiées dans le cas de forts potentiels appliqués

Lorsque la tension appliquée Φ_0 est beaucoup plus grande que U_T , ce qui est toujours le cas en pratique puisque $U_T \approx 26$ mV à la température ordinaire et que le potentiel Φ_0 est habituellement de plusieurs centaines de volts, la relation (20.10) se réduit à :

$$p(-h) = \frac{n_0 \Phi_0}{U_T} \quad (20.12)$$

et (20.11) devient :

$$p(x) = \frac{n_0 \Phi_0}{U_T} \exp(-\phi/U_T) \quad (20.13)$$

Cette dernière relation montre que :

$$p(h) \approx 0 \quad (20.14)$$

Dans ces conditions l'équation (20.8) du potentiel s'écrit :

$$\boxed{\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{n_0 e}{\epsilon} \left[1 - \frac{\Phi_0}{U_T} \exp\left(-\frac{\phi}{U_T}\right) \right]} \quad (20.15)$$

et l'intégrale première (20.9) devient :

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 = \frac{2n_0 e}{\epsilon} \left[\Phi_0 \exp\left(-\frac{\phi}{U_T}\right) + \phi + \phi_1 \right] \quad (20.16)$$

Les relations (20.3) et (20.7) sont équivalentes :

$$\frac{d\phi}{dx} (-h) = \frac{d\phi}{dx} (+h) \quad (20.17)$$

la pente du potentiel est la même aux deux extrémités du cristal, ce qui signifie que le potentiel doit présenter au moins un point d'inflexion. La valeur Φ_c du potentiel en ce point est obtenue à partir de (20.15) qui doit être nulle en ce point :

$$\Phi_c = U_T \text{Log} \frac{\Phi_0}{U_T} \quad (20.18)$$

20.4. Cas où l'on peut obtenir une solution analytique

a) Condition :

La résolution numérique de l'équation (20.15), généralement nécessaire, sera exposée plus loin. Les résultats obtenus par cette méthode montrent cependant que dans certains cas le point d'inflexion est à tangente horizontale (cas où le champ électrique peut s'annuler dans le cristal), on doit avoir par conséquent :

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{\Phi_c} = 0 \quad (20.19)$$

Les relations (20.18) et (20.19) permettent alors d'exprimer la constante ϕ_1 de l'équation (20.16) :

$$\phi_1 = -U_T \left(1 + \text{Log} \frac{\Phi_0}{U_T}\right) \quad (20.20)$$

et la relation (20.16) s'écrit alors :

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 = \frac{2n_0 e}{\epsilon} \left[\Phi_0 \exp\left(-\frac{\phi}{U_T}\right) + \phi - U_T \left(1 + \text{Log} \frac{\Phi_0}{U_T}\right) \right] \quad (20.21)$$

dont la valeur en $x = -h$ permet de connaître la valeur du champ électrique aux limites du cristal :

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{-h}^2 = \frac{2n_0 e}{\epsilon} \left[\Phi_0 - U_T \left(1 - \text{Log} \frac{\Phi_0}{U_T}\right) \right] \quad (20.22)$$

Les valeurs numériques mentionnées au §20.3 montrent que :

$$\left| U_T \left(1 - \text{Log} \frac{\Phi_0}{U_T}\right) \right| \ll \Phi_0 \quad (20.23)$$

Le champ électrique aux extrémités du cristal vaut par conséquent :

$$E_0 = E(\pm h) = -\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{-h} = -\sqrt{\frac{2n_0 e \Phi_0}{\epsilon}} \quad (20.24)$$

Le calcul numérique montre qu'en toutes circonstances la diffusion augmente la valeur du champ électrique aux extrémités du cristal, on a donc :

$$|E(h)| = \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_h > \frac{\Phi_0}{2h} \quad (20.25)$$

$\Phi_0/2h$ représente la valeur absolue du champ électrique en l'absence de diffusion. Dans le cas où le champ électrique peut s'annuler, cette condition subsiste, ce qui implique :

$$\frac{2n_0 e \Phi_0}{\epsilon} > \frac{\Phi_0^2}{4h^2} \quad (20.26)$$

ou encore :

$$\frac{n_0}{\Phi_0} > \frac{\epsilon}{8eh^2} \quad (20.27)$$

Dans le cas d'une plaque de quartz d'épaisseur 0,6 mm ($\epsilon_r \approx 4,5$), cette condition se traduit numériquement par l'ordre de grandeur suivant :

$$\begin{aligned} \frac{n_0}{\Phi_0} &> 3,5 \cdot 10^{14} \text{ m}^{-3} \cdot \text{V}^{-1} \\ \text{soit :} & \\ n_0 &> 1,7 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3} \text{ pour } \Phi_0 = 500 \text{ V} \end{aligned} \quad (20.28)$$

b) Répartition de la charge

La densité de charge q en un point du cristal est donnée par la différence des concentrations entre charges positives et négatives :

$$q = (p - n_0)e \tag{20.29}$$

Aux extrémités du cristal, cette densité s'écrit (cf. (20.12) et (20.14)) :

$$q(-h) = \frac{n_0 e \Phi_0}{U_T} \tag{20.30}$$

$$q(h) = -n_0 e \tag{20.31}$$

Le calcul numérique montre que dans le cas défini par la condition (20.27) la densité de charge suit une loi représentée par la Fig. 20.1(a).

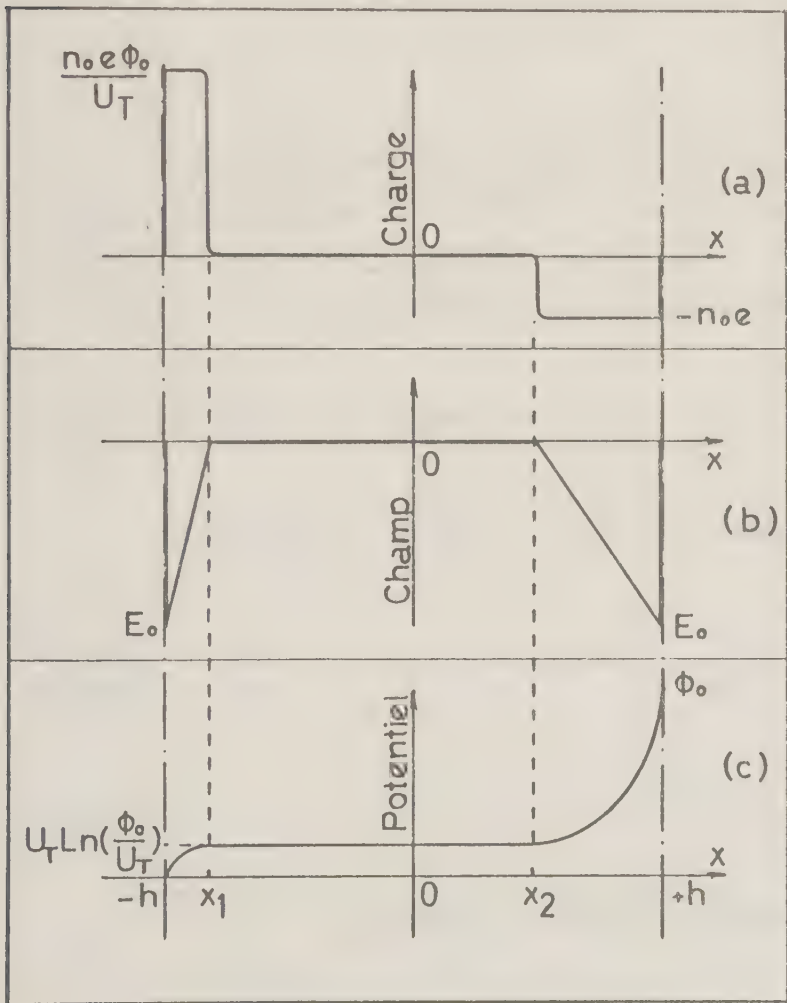


Fig. 20.1
Répartition approximative
(a) de la charge,
(b) du champ électrique
(c) du potentiel lorsque
 $\frac{n_0}{\Phi_0} > \frac{\epsilon}{8eh^2}$

Elle est nulle au centre du cristal et pratiquement constante aux deux bords, tout se passe comme si les charges positives mobiles avaient déserté l'anode laissant entre les abscisses x_2 et h une charge d'espace uniforme $-n_0 e$ due aux charges négatives fixes, et soient venues se concentrer entre les abscisses $-h$ et x_1 sur la cathode avec une densité uniforme $n_0 e \Phi_0 / U_T$.

Cette observation conduit à un modèle simplifié de répartition de charge dans lequel le cristal est divisé en trois zones limitées par des plans parallèles aux électrodes et dans lesquelles la densité de charge est constante ou nulle (cf. Fig. 20.1(a) et tableau 20.A).

La conservation de la neutralité électrique du cristal impose l'égalité des charges positives et négatives, ce qui entraîne :

$$h - x_2 = (x_1 + h) \frac{\Phi_0}{U_T} \quad (20.32)$$

c) Répartition du champ

Le champ est obtenu par intégration de la répartition de charge (cf. (20.2)), il est nul entre x_1 et x_2 (cf. §20.4a) et varie linéairement aux deux extrémités du cristal, l'expression analytique dans les différentes zones est indiquée sur le tableau 20.A et sa représentation sur la Fig. 20.1(b).

Les constantes d'intégration sont calculées connaissant la valeur du champ E_0 aux extrémités (cf. (20.24)).

Les abscisses x_1 et x_2 sont obtenues en écrivant que $E^{(1)}(x_1) = 0$ et $E^{(2)}(x_2) = 0$, ce qui donne :

$$x_1 = \sqrt{\frac{2\epsilon U_T^2}{n_0 e \Phi_0}} - h \quad (20.33)$$

$$x_2 = h - \sqrt{\frac{2\epsilon \Phi_0}{n_0 e}} \quad (20.34)$$

Ces valeurs vérifient naturellement la condition (20.32).

d) Répartition du potentiel

L'intégration du champ permet d'obtenir la répartition du potentiel (cf. (20.3)), il est uniforme au centre du cristal et quadratique aux deux extrémités (cf. Fig. 20.1(c)). Les constantes d'intégration sont obtenues connaissant les conditions aux limites (19.14) et (19.15) tandis que la valeur constante entre x_1 et x_2 est égale à Φ_c donnée par (20.18) :

$$\Phi^{(2)} = \Phi_c = U_T \operatorname{Log} \frac{\Phi_0}{U_T} \quad (20.35)$$

Le tableau 20.A donne l'expression du potentiel dans les différentes zones du cristal.

20.5. Cas général du régime stationnaire : résolution numérique

a) Variables réduites

La résolution numérique de l'équation (20.15) sera simplifiée par l'utilisation de variables réduites sans dimension, définies de la façon suivante :

- Abscisse réduite :

$$X = \frac{x+h}{2h} , \quad -h \leq x \leq +h , \quad 0 \leq X \leq 1 \quad (20.36)$$

- Potentiel réduit :

$$Y = \frac{\phi}{U_T} , \quad 0 \leq \phi \leq \Phi_0 , \quad 0 \leq Y \leq Y_0 = \frac{\Phi_0}{U_T} \quad (20.37)$$

- Concentration réduite :

$$R = \frac{4h^2 en_0}{\epsilon U_T} \quad (20.38)$$

Pour un cristal de quartz d'épaisseur 0,6 mm ($\epsilon_r \approx 4,5$) la concentration réduite vaut :

$$R \approx 5,6 \cdot 10^{-14} n_0 \quad (20.39)$$

b) Résolution de l'équation réduite

A l'aide des variables réduites, l'équation différentielle (20.15) devient :

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = R [1 - Y_0 \exp(-Y)] \quad (20.40)$$

et les conditions aux limites (19.14) et (19.15) s'écrivent :

$$Y(0) = 0 \quad (20.41)$$

$$Y(1) = Y_0$$

La résolution numérique de ce type d'équation fait appel à une technique classique de relaxation (voir par exemple [ANGOT, 1972, ch.10]).

Le programme FORTRAN reposant sur cette méthode a permis d'obtenir les courbes représentées sur les Fig. 20.2-20.4 sur lesquelles on peut voir la répartition du potentiel en fonction de l'abscisse :

- A tension Φ_0 constante pour différentes valeurs de la concentration n_0 (Fig. 20.2)
- A concentration n_0 constante pour différentes valeurs de la tension Φ_0 (Fig. 20.3).

Les valeurs numériques des autres paramètres correspondent aux conditions expérimentales réelles (cf. fin du §20.4.a) :

- Permittivité relative : $\epsilon_r = 4,5$
- Epaisseur du cristal : $2h = 0,6 \text{ mm}$
- Température : $T = 300K$

La Fig. 20.4 donne l'évolution du potentiel pour diverses valeurs de la concentration pour la tension $\Phi_0 = 500 \text{ V}$ correspondant à la valeur utilisée expérimentalement.

L'épaisseur du cristal a été partagée en 100 tranches d'égales valeurs.

Tableau 20.A

Solution analytique approchée pour la répartition de la charge, du champ électrique et du potentiel dans un cristal d'épaisseur $2h$ soumis à une différence de potentiel Φ_0 lorsque le régime permanent est atteint ($\Phi_0 \gg U_T$ et $n_0/\Phi_0 > \epsilon/(8eh^2)$)

	Zone I	Zone II	Zone III	Valeurs caractéristiques
Limites	$-h \leq x \leq x_1$	$x_1 \leq x \leq x_2$	$x_2 \leq x \leq +h$	$x_1 = \sqrt{\frac{2\epsilon U_T^2}{n_0 e \Phi_0}} - h$ $x_2 = h - \sqrt{\frac{2\epsilon \Phi_0}{n_0 e}}$
Charge	$\rho^{(1)} = n_0 e \frac{\Phi_0}{U_T}$	$\rho^{(2)} = 0$	$\rho^{(3)} = -n_0 e$	
Champ électrique	$E^{(1)} = \frac{n_0 e \Phi_0}{\epsilon} (x+h) + E_0$	$E^{(2)} = 0$	$E^{(3)} = \frac{n_0 e}{\epsilon} (h-x) + E_0$	$E_0 = -\sqrt{\frac{2n_0 \Phi_0 e}{\epsilon}}$
potentiel	$\phi^{(1)} = -\frac{n_0 e \Phi_0}{2\epsilon U_T} (x+h)^2 - E_0 (x+h)$	$\phi^{(2)} = U_T \text{Log} \frac{\Phi_0}{U_T}$	$\phi^{(3)} = \frac{n_0 e}{2\epsilon} (h-x)^2 + E_0 (h-x)$	$\Phi_c = U_T \text{Log} \frac{\Phi_0}{U_T}$

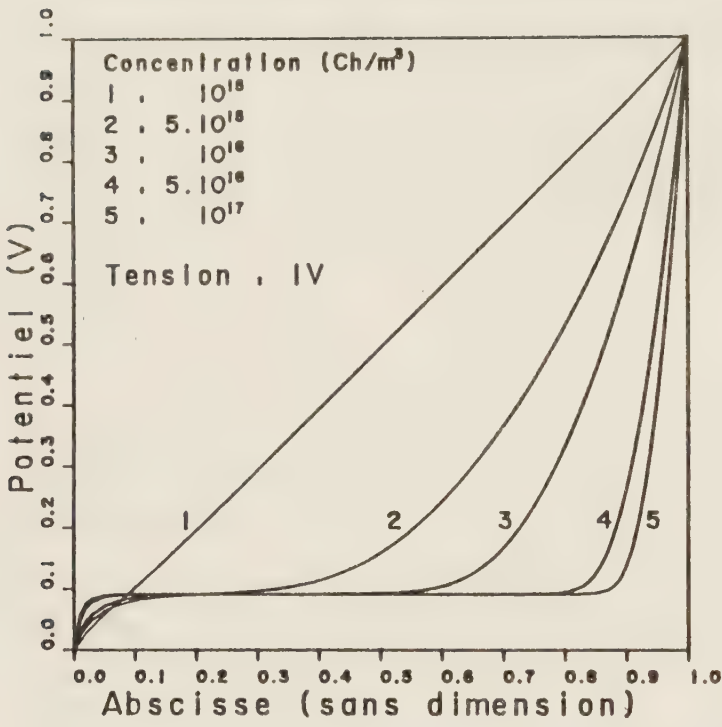


Fig. 20.2

Répartition du potentiel dans l'épaisseur du cristal à tension appliquée constante pour différentes valeurs de la concentration

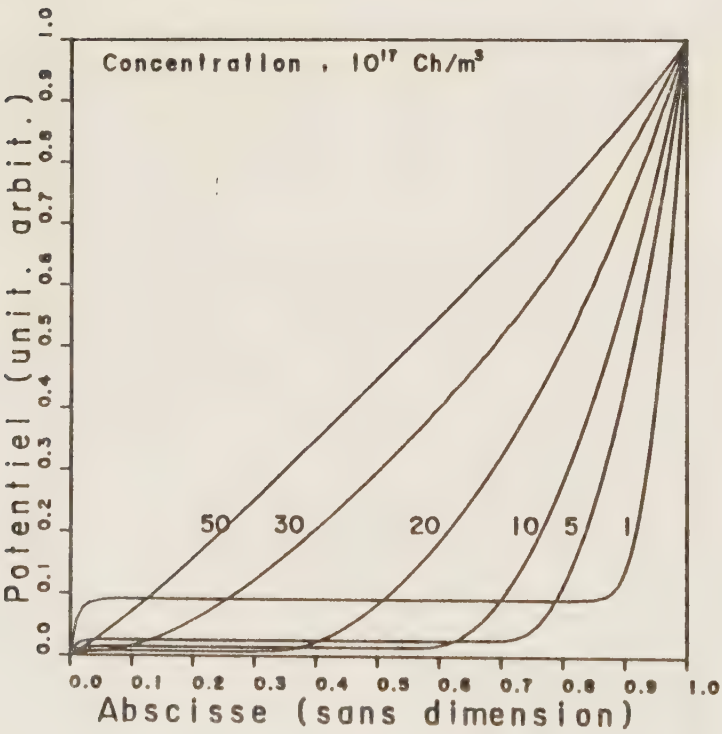


Fig. 20.3

Répartition du potentiel dans l'épaisseur du cristal à concentration constante pour différentes valeurs de la tension appliquée (exprimée en Volt)

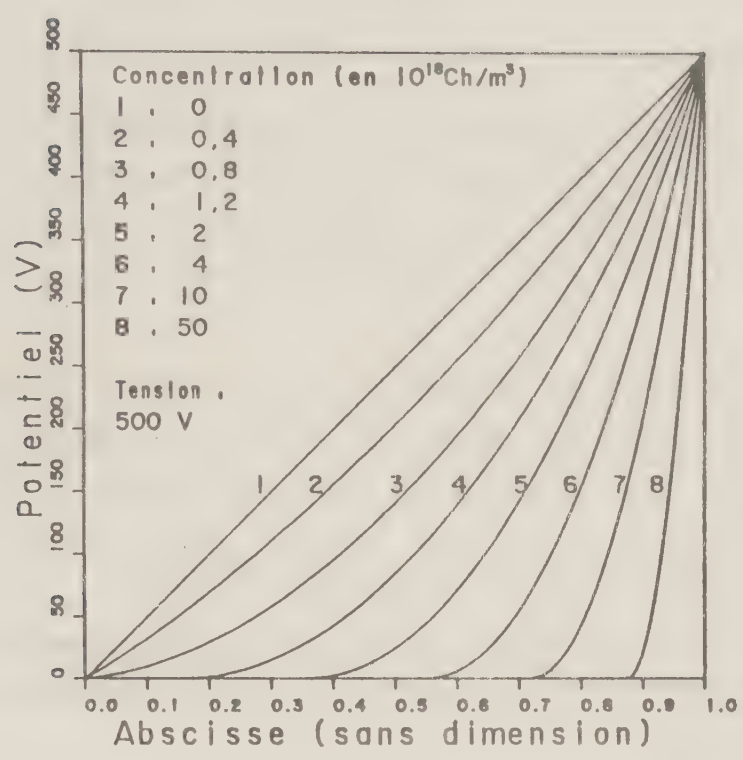


Fig. 20.4 : Répartition du potentiel dans l'épaisseur du cristal à tension appliquée constante de 500 V (valeur utilisée expérimentalement) pour différentes valeurs de la concentration.

21. VARIATION DE FREQUENCE APRES DIFFUSION

21.1. Résumé du problème

Dans la partie de ce mémoire consacrée à l'effet électroélastique, la variation relative de fréquence du résonateur a pu être exprimée en fonction du champ électrique local statique dans le cristal sous forme d'une intégrale ne préjugant pas de la répartition du potentiel le long de l'axe a'_2 (relation (15.22)) .

Lorsque le champ électrique est homogène (cas d'un cristal parfaitement pur) on obtient l'expression (15.23) donnant la variation relative de fréquence en fonction du potentiel appliqué (perturbation homogène), cette expression permet en outre d'exprimer la variation de fréquence dans le cas général en fonction de la perturbation homogène (relation (15.26)).

Rappelons cette relation en notant x au lieu de a'_2 l'abscisse d'un point du cristal et en abandonnant les barres sur les variables statiques :

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_D = \frac{2}{\Phi_0} \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_H \int_{-h}^h \frac{\partial\phi}{\partial x} \cos^2\left(\frac{\omega x}{V}\right) dx \quad (21.1)$$

où $\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_H$ désigne la perturbation homogène de fréquence (cf. (15.23)) et $\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_D$ la perturbation de fréquence en régime permanent après diffusion.

L'étude de la diffusion a permis d'autre part d'exprimer, soit sous forme analytique soit sous forme numérique, la répartition du champ et du potentiel dans le cristal (§20) en fonction de la concentration des impuretés. En reportant l'expression ainsi obtenue dans la relation (21.1) on pourra établir, sous forme analytique ou numérique, le rapport entre la variation de fréquence après diffusion et la variation de fréquence avant diffusion (qui n'est autre que la perturbation homogène) en fonction de la concentration d'impuretés susceptibles de diffuser dans le cristal.

21.2. Cas de la solution analytique

Le tableau 21.A donne l'expression analytique de la solution de l'équation de diffusion (20.40) ; il s'agit du même tableau que 20.A exprimé à l'aide des variables réduites définies au §20.5 et rappelées dans la seconde et dans la dernière colonne du tableau 21.A.

A l'aide de ces mêmes variables réduites, l'équation (21.1) prend la forme suivante :

$$\frac{(\Delta\omega)_D}{(\Delta\omega)_H} = \frac{2}{Y_0} \int_0^1 \frac{dY}{dX} \sin^2(\pi X) dX \tag{21.2}$$

En remplaçant dY/dX par la solution indiquée dans le tableau 21.A on obtient l'expression suivante :

$$\frac{(\Delta\omega)_D}{(\Delta\omega)_H} = \frac{-2}{Y_0} \left(\int_0^{X_1} (RY_0 X + Z_0) \sin^2(\pi X) dX + \int_{X_2}^1 [R(1-X) + Z_0] \sin^2(\pi X) dX \right) \tag{21.3}$$

Dans le cas où la condition de validité (20.27) est largement vérifiée :

$$\frac{n_0}{\Phi_0} \gg \frac{\epsilon}{8eh^2} \tag{21.4}$$

ou sous forme réduite :

$$\frac{Y_0}{2R} \ll 1 \tag{21.5}$$

le rapport (21.3) prend la forme simplifiée suivante :

$$\frac{(\Delta\omega)_D}{(\Delta\omega)_H} \approx \frac{2\pi^2 Y_0}{3R} + O\left(\frac{Y_0}{2R}\right)^2 \tag{21.6}$$

En revenant aux variables réelles, on obtient l'expression suivante :

$$\frac{(\Delta\omega)_D}{(\Delta\omega)_H} \approx \frac{\pi^2 \Phi_0 \epsilon}{6h^2 en_0} \left(1 - \frac{\pi^2 \Phi_0 \epsilon}{15h^2 en_0} \right)$$

(21.7)

Cette relation montre que si la tension appliquée Φ_0 est constante, le rapport de la variation de fréquence après diffusion $(\Delta\omega)_D$ à la perturbation homogène $(\Delta\omega)_H$ tend vers 0 lorsque la concentration d'impuretés augmente, en d'autres termes, la variation de fréquence provoquée par la diffusion tend à annuler la perturbation due à l'effet électroélastique (cf. Fig. 21.1 et Fig. 21.2).

Tableau 21.A

Solution analytique approchée pour la répartition de la charge, du champ électrique et du potentiel réduits en régime permanent dans les mêmes conditions que pour le tableau 20.A

	Variable réduite	Zone I	Zone II	Zone III	Valeurs caractéristiques
Limites	$X = \frac{x + h}{2h}$	$0 < X < X_1$	$X_1 < X < X_2$	$X_2 < X < 1$	$R = \frac{4h^2 \epsilon n_0}{\epsilon U_T} > \frac{Y_0}{2}$
Charge réduite	$C = \frac{\rho}{n_0 e}$	$C^{(1)} = Y_0$	$C^{(2)} = 0$	$C^{(3)} = -1$	$Y_0 = \frac{\Phi_0}{U_T} \gg 1$
Champ électrique réduit	$Z = \frac{2hE}{U_T} = - \frac{dY}{dX}$	$Z^{(1)} = RY_0 X + Z_0$	$Z^{(2)} = 0$	$Z^{(3)} = R(1-X) + Z_0$	$X_1 = \sqrt{\frac{2}{RY_0}}$
Potentiel réduit	$Y = \frac{\phi}{U_T}$	$Y^{(1)} = -RY_0 \frac{X^2}{2} - Z_0 X$	$Y^{(2)} = \text{Log } Y_0$	$Y^{(3)} = \frac{R}{2} (1-X)^2 + Z_0 (1-X) + 1$	$X_2 = 1 - \sqrt{\frac{2Y_0}{R}}$ $Z_0 = \frac{2hE_0}{U_T} = - \sqrt{2RY_0}$

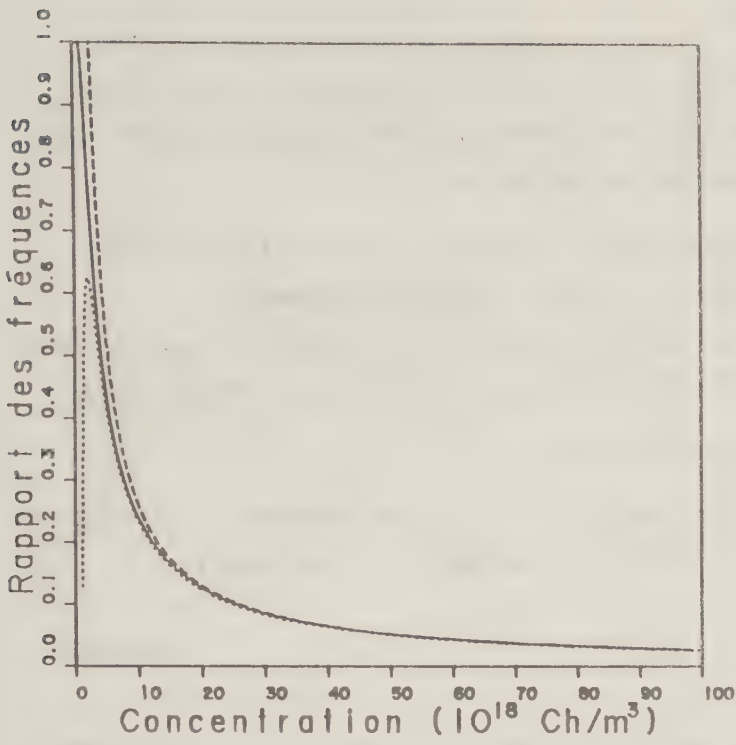


Fig. 21.1
Rapport entre la variation de fréquence après et avant diffusion en fonction de la concentration. La courbe continue représente la solution numérique (exacte), les courbes pointillées correspondent à la solution analytique approchée du 1er ordre (courbe supérieure) et du 2e ordre (courbe inférieure)

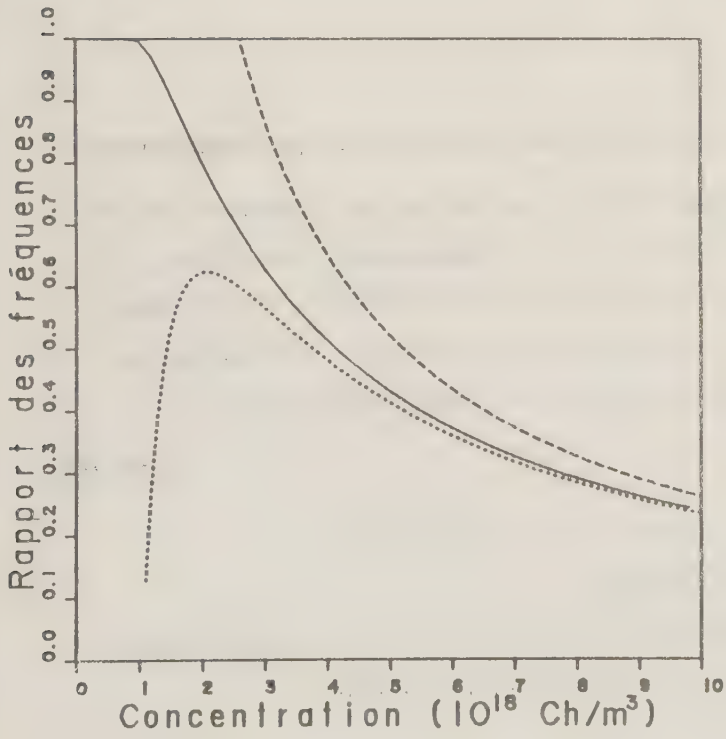


Fig. 21.2
Dilatation de la figure 21.1 pour les faibles valeurs de la concentration

21.3. Cas de la solution numérique

Si l'on ne peut utiliser l'expression analytique du champ dans la relation (21.2) il faut recourir à une intégration numérique dans laquelle dY/dX est remplacée par les valeurs numériques déterminées au §20.5.

Le résultat de ce calcul est représenté sur les Fig. 21.1 et 21.2 où l'on voit que pour les valeurs numériques utilisées expérimentalement (cf. §20.4.a), la diffusion n'influe sur la fréquence qu'à partir d'un rapport $\frac{n_0}{\Phi_0} > 2 \cdot 10^{15}$, de plus, lorsque $\frac{n_0}{\Phi_0} > 4 \cdot 10^{16}$ la courbe analytique (21.7) et la courbe numérique sont pratiquement confondues.

La courbe analytique supérieure des figures 21.1 et 2 correspond à la relation (21.7) dans laquelle on n'a conservé que le terme du 1er ordre :

$$\frac{(\Delta\omega)_D}{(\Delta\omega)_H} \approx 2,6 \frac{10^{18}}{n_0} \quad (21.8)$$

tandis que la courbe analytique inférieure correspond à la relation complète

$$\frac{(\Delta\omega)_D}{(\Delta\omega)_H} \approx \frac{2,6 \cdot 10^{18}}{n_0} \left(1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{2,6 \cdot 10^{18}}{n_0} \right) \quad (21.9)$$

21.4. Evolution de la variation de fréquence en fonction de la température

Le seul moyen d'observer expérimentalement la variation de fréquence en fonction de la concentration consiste à agir sur la température, en effet, la grandeur n_0 dont il est question dans les §19-§21 représente la concentration d'impuretés susceptibles de se mouvoir dans le milieu. Ce nombre est lié à la température par une loi de type Arrhénius [KITTEL, 1976, ch.17] :

$$n_0 = N_0 \exp(-W_a/2kT) \quad (21.10)$$

N_0 est le nombre total d'impuretés contenues dans le cristal

n_0 représente le nombre d'impuretés ionisées

W_a est l'énergie d'ionisation, le facteur 1/2 provient du fait que l'ionisation concerne la formation d'une paire de charges opposées.

La relation (21.10) montre qu'une valeur possible de n_0 correspond à une infinité de couples (N_0, W_a) , seule l'allure de la courbe expérimentale peut permettre d'identifier les valeurs correctes. Les courbes représentées sur les Fig. 21.3 - 21.5 montrent comment évolue le rapport $\frac{(\Delta\omega)_D}{(\Delta\omega)_H}$ en fonction de la température :

- Pour différentes valeurs de W_a lorsque N_0 est fixé (Fig. 21.3)
- Pour différentes valeurs de N_0 lorsque W_a est fixé (Fig. 21.4)
- Pour différents couples (N_0, W_a) donnant à la température de 50°C un rapport $\frac{(\Delta\omega)_D}{(\Delta\omega)_H} = 0,5$ (Fig. 21.5).

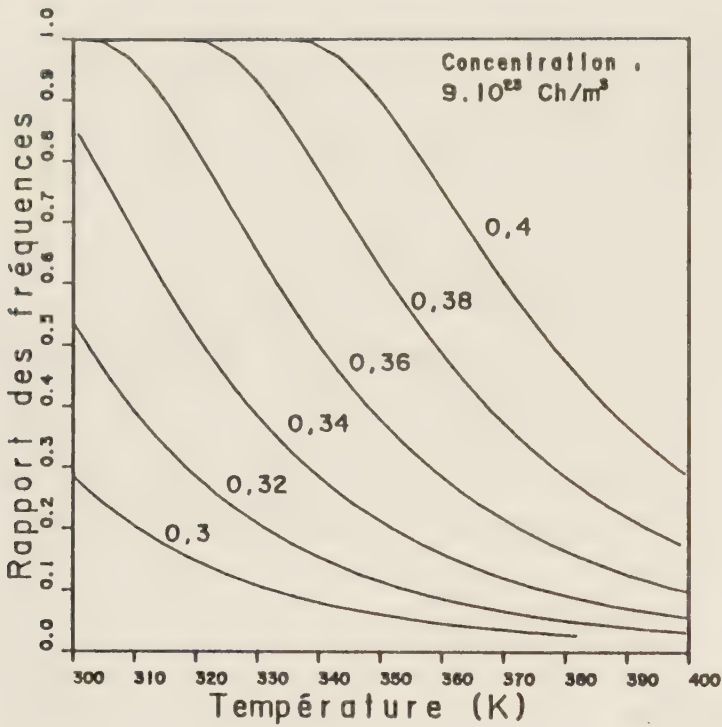


Fig. 21.3

Rapport entre la variation de fréquence après et avant diffusion en fonction de la température à concentration totale d'impuretés constante pour différentes valeurs de l'énergie d'activation (exprimée en eV)

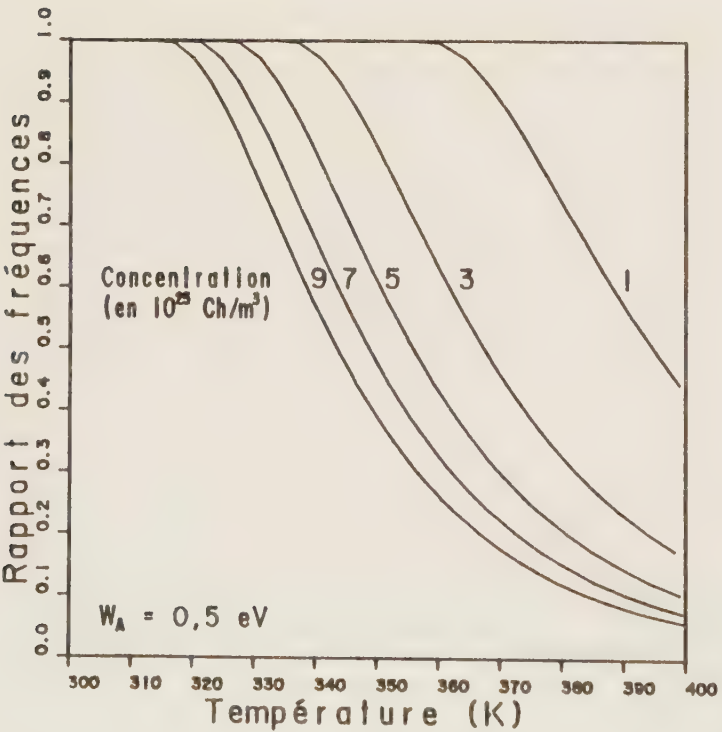


Fig. 21.4

Rapport entre la variation de fréquence après et avant diffusion en fonction de la température à énergie d'activation constante pour différentes valeurs de la concentration totale d'impuretés

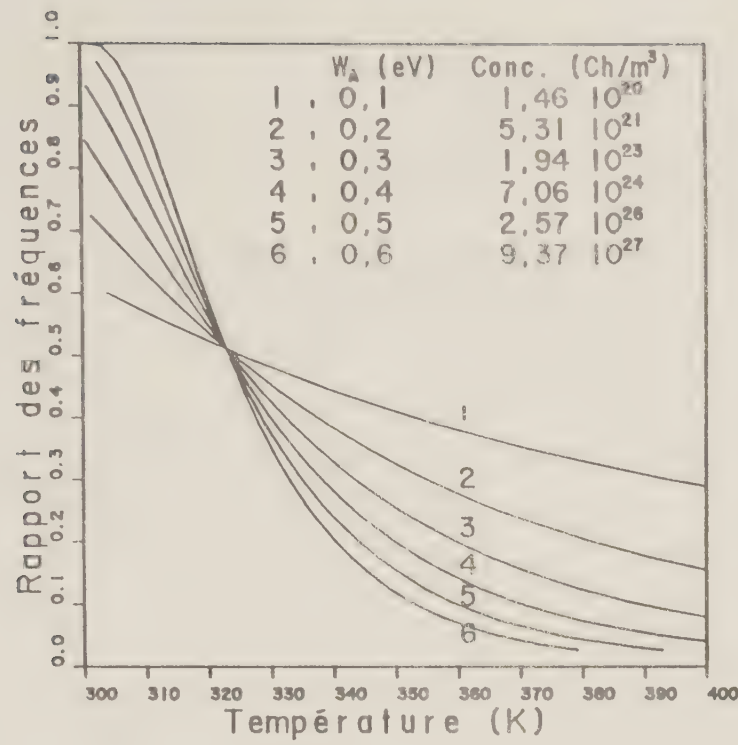


Fig. 21.5 : Rapport des variations de fréquence après et avant diffusion en fonction de la température pour différents couples (énergie d'activation W_a , concentration totale d'impureté N_0) correspondant tous à un rapport de fréquence de 1/2 à 50°C.

CHAPITRE 8

TECHNIQUES EXPERIMENTALES

Après une brève description du matériel, des contraintes et des difficultés rencontrées, on présente un dispositif expérimental de conception nouvelle et le déroulement de l'expérience ainsi que des enregistrements typiques de relaxation en champ fort.

22. CONSTRAINTES EXPERIMENTALES

22.1. Choix des échantillons

Pour mettre en évidence la diffusion des impuretés grâce à l'effet électroélastique, il faut que la fréquence du résonateur utilisé soit sensible au champ électrique appliqué sur ses électrodes. Or les résonateurs les plus courants sont obtenus à partir de lames coupées en simple rotation ($\phi = 0$), la Fig. 16.1 montre que pour cette orientation, l'effet électroélastique est nul. Il reste alors l'alternative suivante :

- choisir une coupe à double rotation avec électrodes normales
- choisir une coupe à simple rotation avec des électrodes déposées de telle sorte que le champ électrique continu puisse avoir une composante suivant une direction sensible à l'effet électroélastique.

Les deux types de résonateurs ont été étudiés.

Les résonateurs à double rotation sont des quartz polonais UNITRA de coupe FC $(yxw\lambda)_{150/34,330}$ (cf. annexe B) 5 MHz partiel 3 d'épaisseur 0,6 mm présentant un effet électroélastique d'environ $2 \cdot 10^{-12}$ m/V sur le mode C.

Les résonateurs à simple rotation réalisés au Laboratoire de Chronométrie et de Piézoélectricité sont des coupes AT 5 MHz fondamentaux d'épaisseur 0,33 mm dont les électrodes en forme de Z permettent un effet électroélastique du même ordre de grandeur que le précédent (cf. Fig. 22.1).

Dans les deux cas les échantillons se présentent sous la forme de disques de diamètre environ 15 mm encapsulés sous vide.

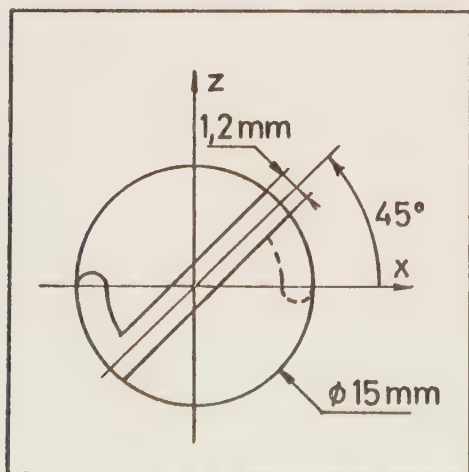


Fig. 22.1

Résonateur coupe AT 5 MHz fondamental
électrodes en Z

22.2. Choix des conditions expérimentales

a) Température

Comme on l'a vu au §21.4, il est possible en agissant sur la température, de faire varier la concentration de charges susceptibles de se mouvoir.

La gamme de température utilisée expérimentalement est limitée vers les basses températures par l'augmentation considérable des constantes de temps de retour à l'équilibre (cf. Fig. 18.3) et vers les hautes températures par la technologie de l'enceinte thermostatée utilisée.

Les mesures ont en conséquence été réalisées entre 30° et 100°C.

b) Tension

Pour réaliser des mesures précises et reproductibles sur une longue durée, il faut que l'effet électroélastique soit très supérieur aux fluctuations de fréquence du résonateur lui-même et que la tension continue appliquée reste stable pendant la durée de l'expérience.

Les tensions utilisées : quelques centaines de volts, correspondent à des champs électriques de l'ordre de 5 000 à 30 000 V/cm.

22.3. Premières expériences

Elles ont été réalisées à l'aide du dispositif expérimental représenté sur la Fig. 22.2, inspiré de celui de [KUSTERS, 1970].

Le quartz placé dans une enceinte thermostatée traditionnelle était excité par un synthétiseur asservi sur la fréquence d'antirésonance. La haute tension provenant d'une double alimentation stabilisée 0, -2 kV et 0, +2 kV était commutée périodiquement par un générateur de signaux carrés très basse fréquence et la tension d'erreur de l'asservissement, proportionnelle à la variation de fréquence, était enregistrée graphiquement.

La stabilité en température du thermostat se révéla rapidement insuffisante pour permettre des enregistrements reproductibles surtout dans les régions éloignées du point d'inversion de la courbe fréquence-température du résonateur où la fréquence, très sensible à la température, peut présenter des fluctuations relatives de l'ordre de 10^{-6} /°C.

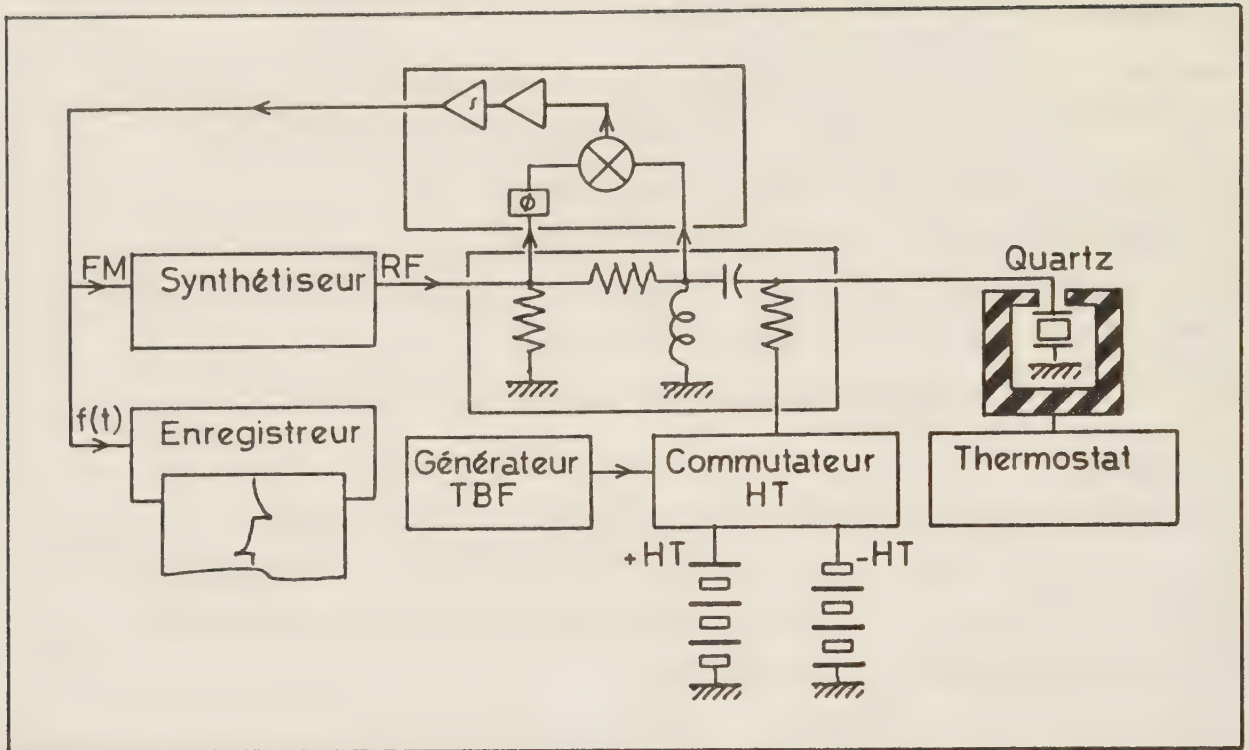


Fig. 22.2 : Montage expérimental initial : le résonateur est excité par un synthétiseur et la variation de fréquence consécutive à l'application de la haute tension est enregistrée en fonction du temps.

La stabilité, la symétrie et le temps de montée insuffisants de la double alimentation haute tension apparurent également incompatibles avec la précision requise pour ce type de mesure.

En outre, des fluctuations de fréquence dues à l'offset de l'amplificateur de sortie du phasemètre et à la dérive de l'oscillateur d'interpolation du synthétiseur conduisirent à abandonner la technique de l'asservissement.

Ces raisons auxquelles s'ajoutait un dépouillement long, fastidieux et imprécis des résultats obtenus sous forme graphique, conduisirent à une révision totale du dispositif expérimental.

23. DISPOSITIF EXPERIMENTAL (Fig. 23.1)

23.1. L'oscillateur

Pour s'affranchir des fluctuations de fréquence dues au dispositif précédent, le quartz n'est plus excité par une source extérieure mais monté en oscillateur.

Le dispositif d'entretien est constitué par un circuit intégré Plessey SL680A. La puissance d'excitation du cristal est de l'ordre de quelques microwatts et la fréquence de l'oscillateur suit instantanément celle du quartz.

La stabilité de l'oscillateur dépend du résonateur et de la température à laquelle se déroule l'expérience, elle est en moyenne de 10^{-9} sur une heure et de 5.10^{-9} sur un jour. Il faut noter ici que dans la gamme de tension utilisée, la variation relative de fréquence due à l'effet électroélastique est de l'ordre de 10^{-6} ce qui assure une précision acceptable pour les mesures.

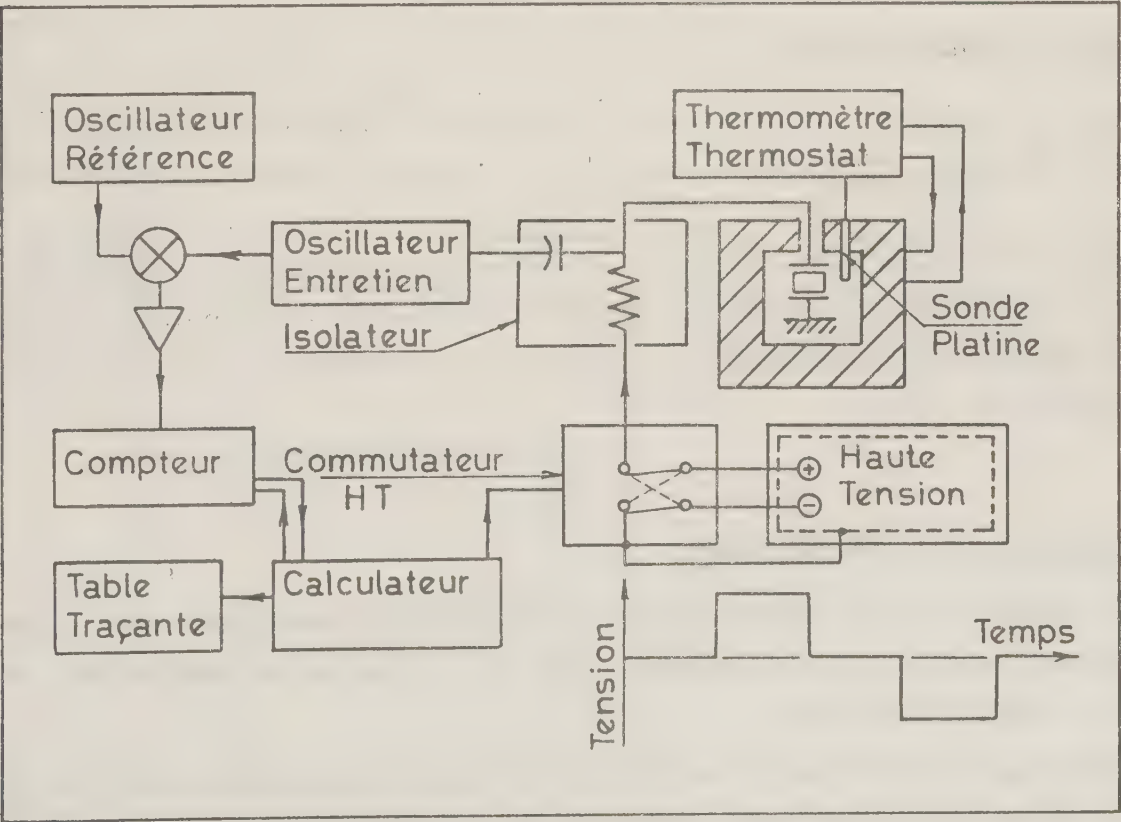


Fig. 23.1 : Montage expérimental actuel : le résonateur fait partie d'un oscillateur dont la fréquence varie à la suite du cycle de tension appliqué. Après mélange avec un oscillateur de référence, la variation de fréquence est échantillonnée et enregistrée pour être traitée ultérieurement par le calculateur qui gère en outre l'ensemble de l'expérience.

23.2. Contrôle et mesure de la température

Le résonateur est placé dans une enceinte en cuivre sur laquelle un double bobinage de fil émaillé permet le chauffage et le contrôle de la température à $\pm 1/100^{\circ}\text{C}$ grâce à un thermostat à détection synchrone conçu et réalisé au laboratoire par R. PRETOT. La température peut être réglée de la valeur ambiante à environ 100°C , elle est mesurée au voisinage du résonateur par un thermomètre à sonde de platine de résolution $\pm 1/10^{\circ}\text{C}$.

23.3. Haute tension

La double alimentation est remplacée par un étalon de tension FLUKE 335A pouvant varier de 0 à 1 100 V et présentant une stabilité de 10 ppm maximum pour la durée de l'expérience.

Cet étalon est associé à un commutateur haute tension permettant la réalisation d'un cycle de tension alterné (voir Fig. 23.1).

23.4. Mesure de la fréquence

La mesure des variations de fréquence du résonateur s'effectue selon une technique désormais classique au laboratoire (voir par exemple [GROSLAMBERT, 1975]) :

Après mélange avec un oscillateur de référence, les variations de fréquence du résonateur, ramenées à quelques centaines de Hz, sont mesurées par un compteur Hewlett-Packard HP5345A et enregistrées par le calculateur Hewlett Packard HP9830A.

23.5. Déroulement de l'expérience

Afin de limiter le plus possible les erreurs ou les perturbations dues à une intervention manuelle, l'expérience, hormis le réglage de la température, se déroule de façon automatique.

Les expériences s'effectuent à température constante échelonnée de 10° en 10° entre 30° et 100°C . Compte tenu de cette gamme de température et des constantes de temps mises en jeu, la durée d'une alternance, c'est-à-dire la durée de mise sous tension ou de retour à l'équilibre a été fixée à environ

30 heures, un cycle complet représenté sur la Fig. 23.1 comportant deux mises sous tension et deux retours à l'équilibre nécessite environ cinq jours d'enregistrement continu, ce qui justifie, si besoin est, l'automatisation du processus.

Pour couvrir la gamme de température indiquée et compte tenu du temps nécessaire à la stabilisation en température, l'étude complète d'un échantillon nécessite environ deux mois.

Lorsque la température est stabilisée au bout de quelques heures, le calculateur est mis en service et gère entièrement l'expérience : il commande la mise en service ou la déconnexion de la haute tension sur les électrodes du résonateur et simultanément, l'échantillonnage de la fréquence grâce au compteur programmable.

Pour obtenir le maximum d'informations sur l'évolution de la fréquence sans saturer la mémoire du calculateur, l'échantillonnage se fait selon un rythme de plus en plus lent représenté sur la Fig. 23.2.

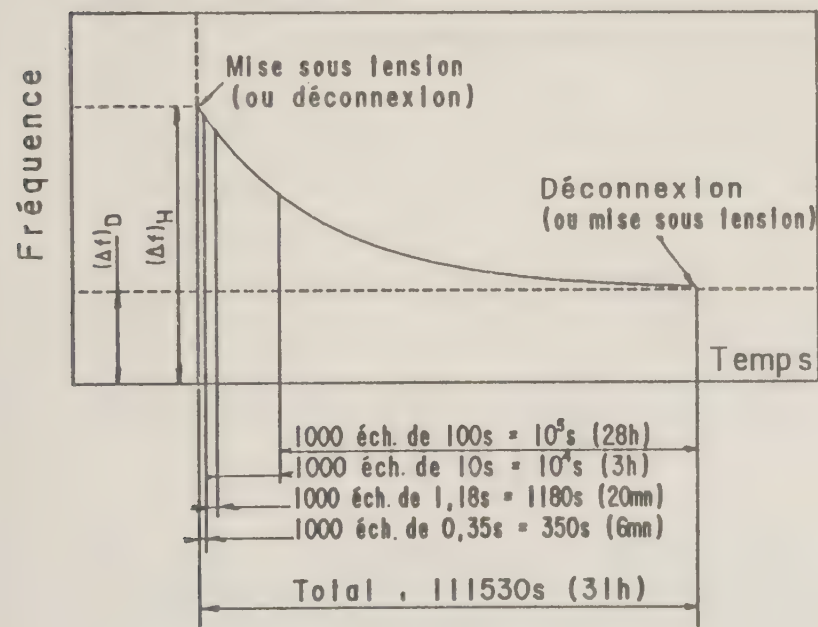


Fig. 23.2
Allure typique de la variation de fréquence observée montrant les caractéristiques de l'échantillonnage et l'échelle des temps utilisée.

Un peu avant la fin de l'alternance, les 4 000 échantillons de fréquence ainsi enregistrés sont stockés sur bande magnétique afin d'être traités ultérieurement. L'enregistrement des mesures sous forme numérique a considérablement amélioré la précision des résultats expérimentaux tout en simplifiant leur exploitation.

24. RESULTATS EXPERIMENTAUX

La Fig. 24.1 montre une série d'enregistrements typiques de relaxation, la partie supérieure de la figure représente le cycle de haute tension et la partie inférieure les variations de fréquence correspondantes pour différentes valeurs de la température.

Avec les notations de la Fig. 23.2, ces enregistrements montrent que la valeur $(\Delta f)_H$ de l'effet électroélastique homogène ne dépend pratiquement pas de la température dans la gamme étudiée tandis que les constantes de temps de retour à l'équilibre et la valeur $(\Delta f)_D$ de la variation de fréquence après diffusion en dépendent considérablement, $(\Delta f)_D$ présentant d'ailleurs des valeurs négatives lorsque la température augmente.

Afin d'affranchir l'exploitation des résultats expérimentaux des phénomènes particuliers qui suivent la mise sous tension (cf. Fig. 24.1 et §26), seuls les enregistrements consécutifs à la déconnexion ont été retenus. La Fig. 24.2 montre les enregistrements de la fréquence après déconnexion de la source haute tension (passage + 500 V à 0 et passage -500 V à 0). Comme on peut le voir, les courbes obtenues sont parfaitement symétriques.

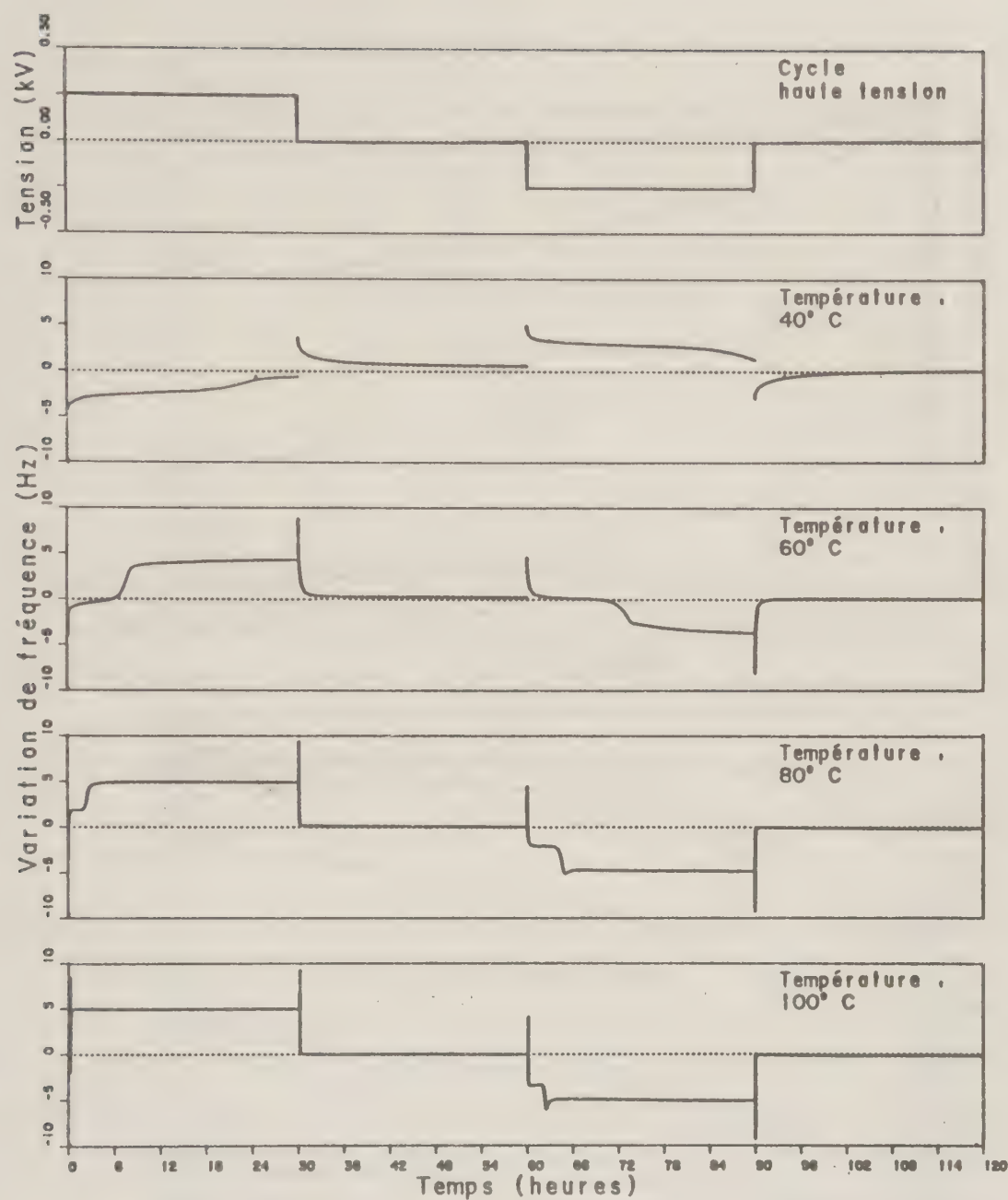


Fig. 24.1 : Enregistrements de la fréquence d'un résonateur coupe FC à différentes températures pour le cycle complet de haute tension représenté à la partie supérieure.

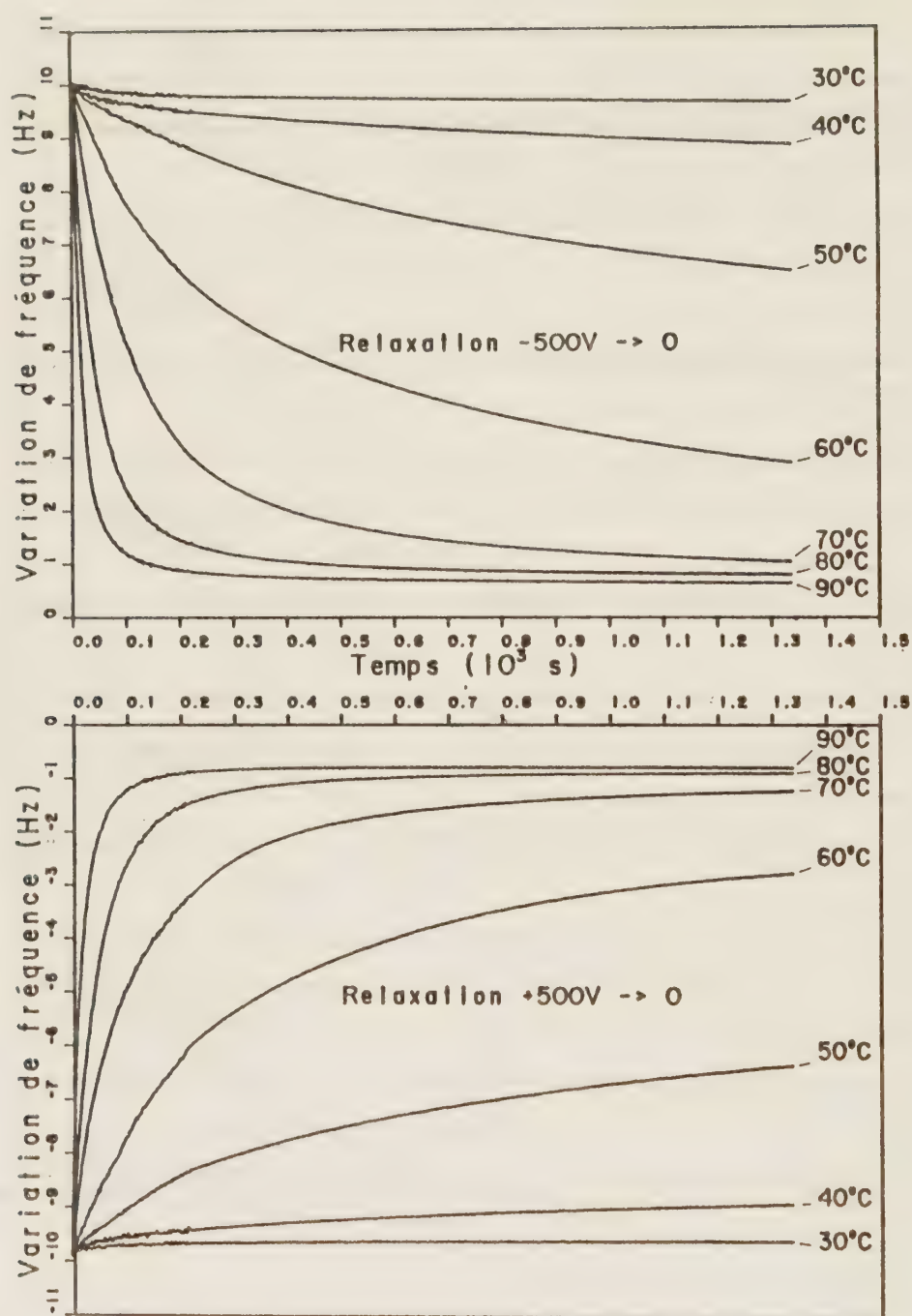


Fig. 24.2 : Enregistrements de la fréquence d'un résonateur coupe FC après déconnexion de la haute tension pour différentes valeurs de la température. Noter la forte incidence de la température sur la constante de temps de retour à l'équilibre.

CHAPITRE 9

EXPLOITATION DES RESULTATS

Plusieurs renseignements peuvent être tirés des résultats expérimentaux :

- l'étude des constantes de temps de retour à l'équilibre en fonction de la température permet d'accéder à l'énergie d'activation du processus de migration.
- l'étude du rapport des fréquences après et avant diffusion conduit à l'énergie d'ionisation et à la concentration totale d'impuretés contenues dans le cristal.

Certains comportements observés expérimentalement n'ont cependant pas encore reçu d'explication satisfaisante.

Le chapitre se termine sur la description du dispositif expérimental permettant la mesure des pertes acoustiques à basse température. La confrontation des résultats obtenus par cette méthode et par la relaxation en champ fort pourrait permettre l'identification des impuretés.

25. DETERMINATION EXPERIMENTALE DES ENERGIES D'ACTIVATION

L'allure des enregistrements représentés sur les figures 24.1 indique que le retour à l'équilibre de la fréquence se fait selon une loi quasi exponentielle dont la constante de temps varie avec la température, c'est d'ailleurs la forte dépendance de la constante de temps avec la température qui a suggéré en premier lieu que le phénomène pouvait être dû à la migration d'impuretés chargées.

25.1. Identification de la loi de variation

La première méthode utilisée pour identifier la loi de variation de la fréquence en fonction du temps consiste à calculer en tous points la valeur de l'argument d'une fonction exponentielle et de le tracer en fonction du temps: avec les notations de la Fig. 25.1 la constante de temps τ de retour à l'équilibre s'exprime en fonction du temps par la relation :

$$\tau = \frac{n\Delta t}{\text{Log} \left(\frac{f_0 - f_a}{f_n - f_a} \right)} \quad (25.1)$$

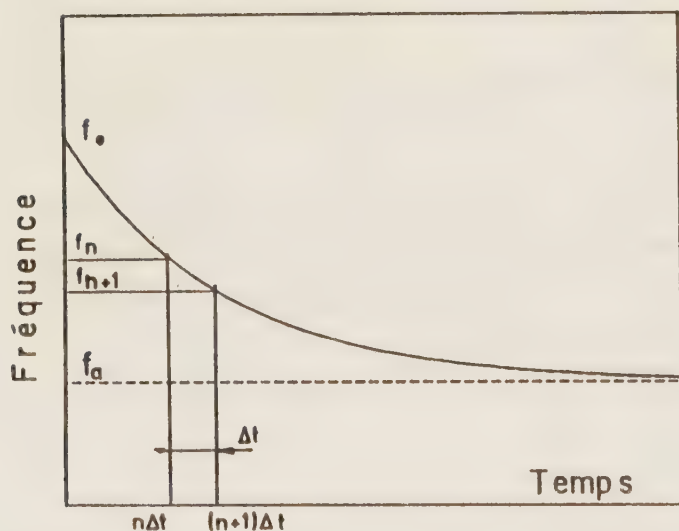


Fig. 25.1

Echantillonnage de la fréquence permettant la détermination des constantes de temps de retour à l'équilibre

Si la courbe est purement exponentielle, le résultat obtenu doit être une droite horizontale dont l'ordonnée donne la valeur de la constante de temps.

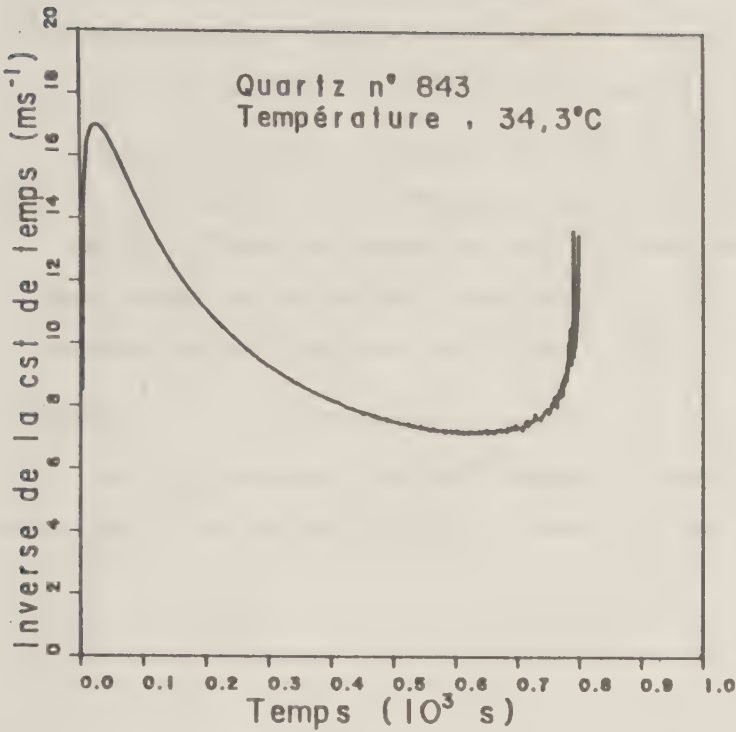


Fig. 25.2

Le tracé expérimental de la constante de temps en fonction du temps montre qu'il existe au moins deux constantes de temps : la plus courte est prépondérante au début du tracé tandis que la plus longue n'apparaît qu'à la fin.

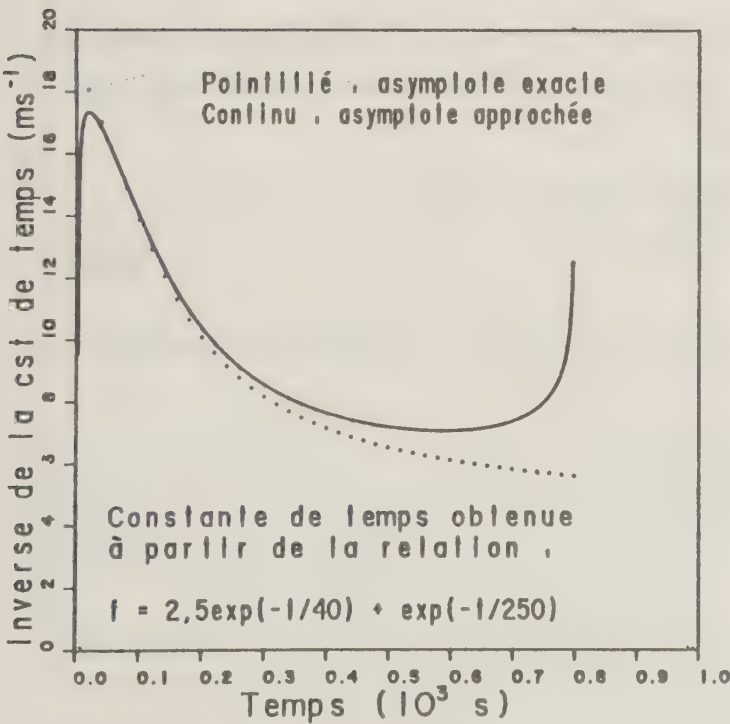


Fig. 25.3

Simulation de la détermination des constantes de temps montrant que la déformation de la courbe est due à l'imprécision sur la position de l'asymptote.

La courbe obtenue en réalité (cf. Fig. 25.2) montre que le phénomène met en jeu au moins deux constantes de temps, la plus courte étant prépondérante au début du tracé tandis que la plus longue n'apparaît que vers la fin.

L'inconvénient de cette méthode réside dans le fait que la durée limitée d'enregistrement ne permet pas de connaître avec précision la position de l'asymptote f_a , cette incertitude entraîne une déformation notable de la courbe et une erreur importante sur la valeur des constantes de temps comme le montre la simulation de la Fig. 25.3. Dans cette simulation, la fonction :

$$f = 2,5 \exp(-t/40) + \exp(-t/250) \quad (25.2)$$

a été échantillonnée par le programme d'acquisition de fréquence et les échantillons obtenus traités par le programme de détermination des constantes de temps.

25.2. Régression exponentielle

La méthode précédente montre que si le retour à l'équilibre s'effectue selon une loi quasi exponentielle, celle-ci met en jeu au moins deux constantes de temps.

Une technique possible pour les identifier consiste à effectuer ce que l'on pourrait appeler une "régression exponentielle" basée sur une méthode des moindres carrés [ANGOT, 1972, ch.10].

Il s'agit de déterminer quelle est la courbe du type :

$$f = f_0 + f_1 \exp(-t/\tau_1) + f_2 \exp(-t/\tau_2) \quad (25.3)$$

qui passera au "plus près" des points expérimentaux au sens des moindres carrés.

Si l'on pose (cf. Fig. 25.1) :

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \exp(-\Delta t/\tau_1) \\ u_2 &= \exp(-\Delta t/\tau_2) \end{aligned} \right\} \quad (25.4)$$

de sorte que :

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{\Delta t}{\text{Log}(1/u_1)} \\ \tau_2 &= \frac{\Delta t}{\text{Log}(1/u_2)} \end{aligned} \right\} \quad (25.5)$$

on montre que les inconnues u_1 et u_2 sont solutions de l'équation du 2e ordre

$$u^2 - su + p = 0 \quad (25.6)$$

dans laquelle :

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{s_{12}s_{13} - s_{11}s_{23}}{s_{12}^2 - s_{11}s_{22}} \\ p &= \frac{s_{13}s_{22} - s_{23}s_{12}}{s_{12}^2 - s_{11}s_{22}} \end{aligned} \right\} \quad (25.7)$$

les constantes s_{ij} étant liées aux différences premières

$$\Delta_n = f_{n+1} - f_n \quad (25.8)$$

par les relations suivantes dans lesquelles n varie de 1 à $N-3$, N étant le nombre d'échantillons considéré :

$$\left. \begin{aligned} s_{11} &= \sum_{n=1}^{N-3} \Delta_n^2 \\ s_{12} &= \sum \Delta_n \Delta_{n+1} \\ s_{13} &= \sum \Delta_n \Delta_{n+2} \\ s_{22} &= \sum \Delta_{n+1}^2 \\ s_{23} &= \sum \Delta_{n+1} \Delta_{n+2} \\ s_{33} &= \sum \Delta_{n+2}^2 \end{aligned} \right\} \quad (25.9)$$

L'erreur quadratique moyenne ϵ est donnée par la relation :

$$\epsilon = s_{13} \cdot p - s_{23} \cdot s + s_{33} \quad (25.10)$$

Un calcul analogue permet la détermination des amplitudes f_0 , f_1 et f_2 .

La Fig. 25.4 montre un exemple de détermination des constantes de temps par cette méthode, les croix indiquent les points expérimentaux tandis que la courbe en trait continu représente la fonction (25.3) recalculée à partir des résultats obtenus.

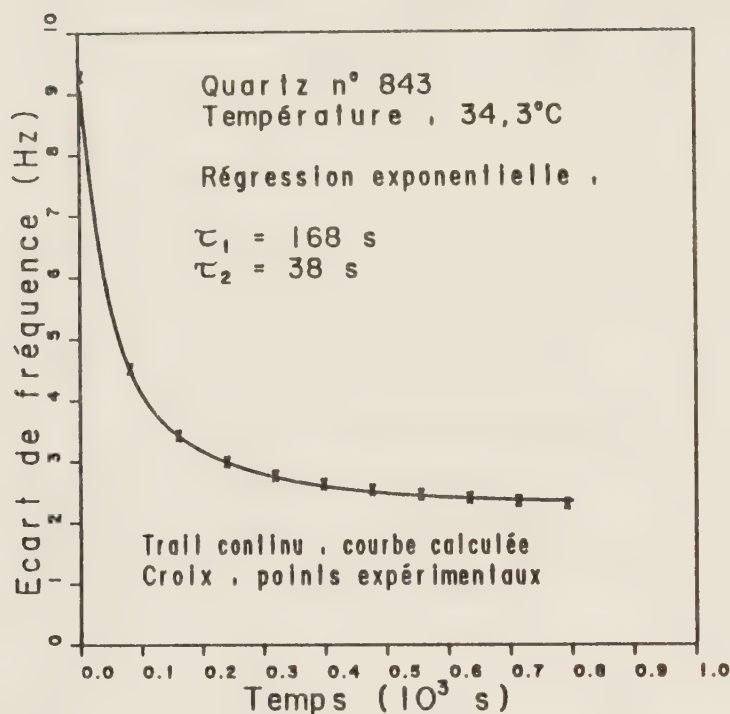


Fig. 25.4

Principe de la régression exponentielle : la courbe continue est la somme de deux fonctions exponentielles dont les constantes de temps sont déterminées à partir des résultats expérimentaux.

25.3. Evolution des constantes de temps en fonction de la température

Comme cela a déjà été souligné au début de ce paragraphe, la forte dépendance des constantes de temps en fonction de la température a initialement suggéré que le phénomène était dû à un processus de relaxation.

Dans ce cas, la loi de variation des constantes de temps doit obéir à une équation de type Arrhénius analogue à celle qui régit les phénomènes de relaxation anélastique dans les cristaux [NOWICK, 1972, ch.3] :

$$\tau = \tau_0 \exp(W_m/kT) \quad (25.11)$$

τ_0 est une constante indépendante de la température et W_m est l'énergie d'activation du processus de migration.

Si l'on représente le logarithme népérien des constantes de temps en fonction de l'inverse de la température, la relation (25.11) indique que les points obtenus doivent s'aligner sur une droite dont la pente est proportionnelle à l'énergie W_m .

La Fig. 25.5 montre le résultat de cette représentation pour un quartz coupe AT électrodes en Z pour lequel deux constantes de temps ont pu être séparées.

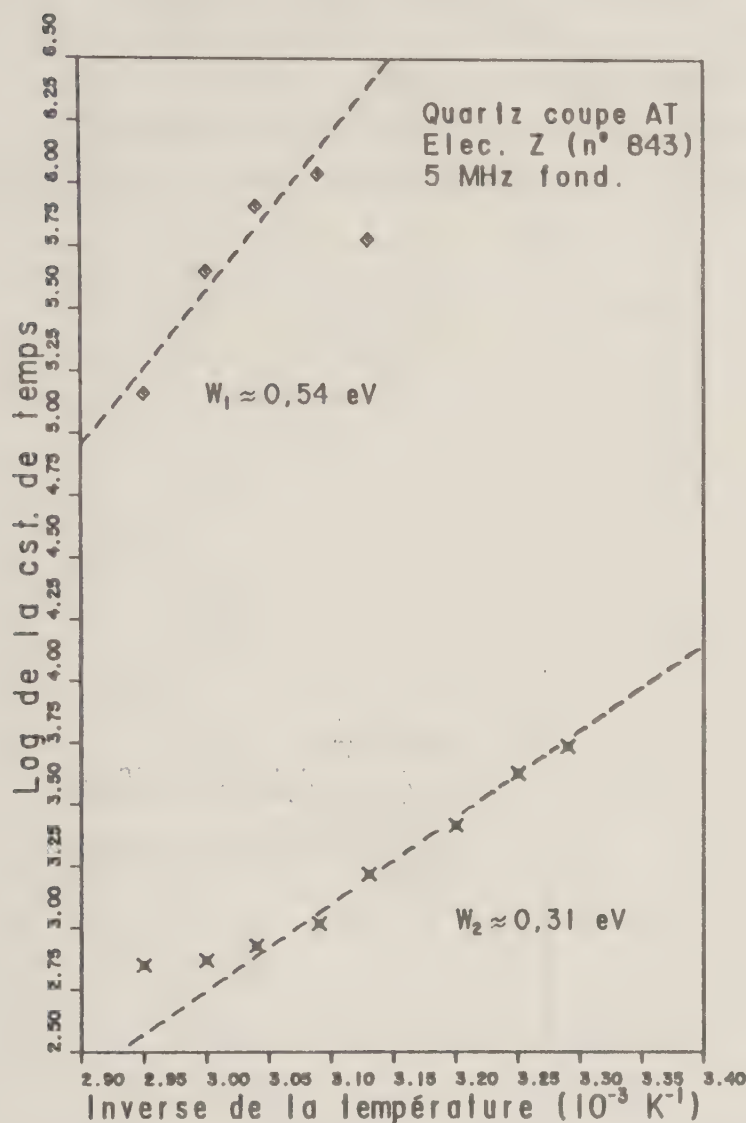


Fig. 25.5

L'énergie d'activation du processus de migration est représentée par la pente des droites obtenues en représentant le logarithme des constantes de temps en fonction de l'inverse de la température.

Le tassement des courbes est dû pour la partie inférieure à la cadence d'échantillonnage insuffisante et pour la partie supérieure à la durée limitée de l'expérience.

Pour ce cristal, la mesure des constantes de temps a été effectuée avec l'ancien dispositif expérimental dans lequel la cadence d'échantillonnage était inférieure à un point par seconde et la durée de l'alternance de l'ordre de 800 secondes. Ces deux limitations apparaissent nettement sur la Fig. 25.5 où l'on voit un "tassement" de la courbe aussi bien vers les faibles valeurs de τ que vers les valeurs élevées.

Malgré ces imperfections, les énergies d'activation ont pu être estimées à :

$W_1 > 0,54 \text{ eV}$

pour la plus longue des constantes de temps et à :

$W_2 \approx 0,31 \text{ eV}$

pour la plus courte, cette dernière avec une meilleure précision que la précédente.

La Fig. 25.6 présente le résultat obtenu à partir des mesures effectuées sur un quartz coupe FC avec le nouveau dispositif expérimental dans lequel la cadence maximale d'échantillonnage est portée à 3 points par seconde et la durée de l'expérience prise en compte à environ 10 000 s, ce qui se traduit ici encore par une saturation de la courbe vers les fortes valeurs de τ . Dans ce cas, la mesure de l'énergie d'activation donne le résultat suivant : $W_m = 1$ eV à moins de 5 % près.

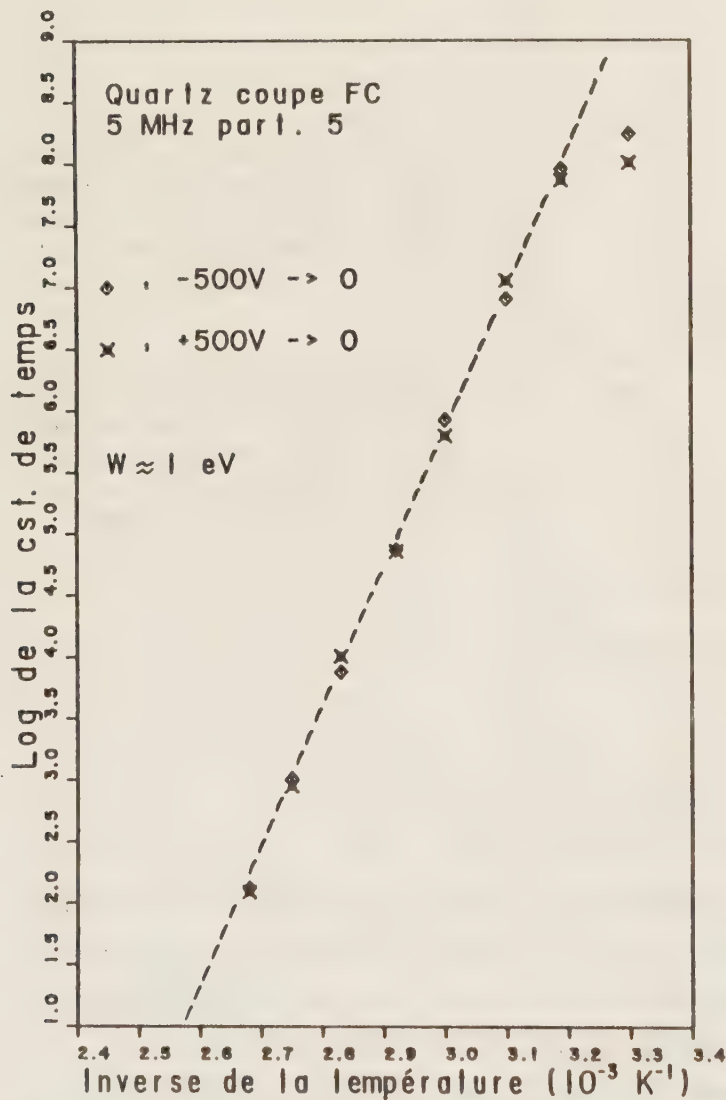


Fig. 25.6
Détermination de l'énergie d'activation (voir légende de la figure 25.5).

Les croix et les cercles correspondent aux constantes de temps de retour à l'équilibre lorsque la tension passe respectivement de -500 V à 0 et de +500V à 0. La correspondance presque parfaite des valeurs permet d'apprécier la précision du dispositif expérimental et la reproductibilité des résultats obtenus. La valeur des constantes de temps ainsi déterminées est tout à fait comparable aux valeurs obtenues à partir des mesures de conductivité (tableau 18.1).

26. INTERPRETATION DES RESULTATS EXPERIMENTAUX

26.1. Détermination de l'énergie d'ionisation et de la concentration d'impuretés

La Fig. 26.1 montre que le rapport $\frac{(\Delta f)_D}{(\Delta f)_H}$ évolue dans le sens indiqué par le calcul du §21.4 (Fig. 21.3-21.5) bien que l'étude théorique ne prévoie pas que ce rapport puisse prendre des valeurs négatives comme les résultats expérimentaux le font apparaître.

Ce comportement particulier qui semble indiquer que le champ dépolarisant créé par la migration peut prendre des valeurs supérieures au champ électrique appliqué, est probablement lié au fait que les impuretés ne migrent pas nécessairement dans la direction normale à la plaque mais plutôt dans les directions de moindre résistance correspondant aux canaux évoqués au §17.1. Cette anisotropie de la diffusion entraîne la formation de composantes du champ électrique dans des directions différentes de la normale notamment dans la direction de l'axe optique Z et de l'axe électrique X (cf. annexe B), or l'étude effectuée au §15.5, les courbes présentées au §16.3 (Fig. 16.2-16.3) ainsi que le tableau 16.C montrent que l'effet électroélastique dû à un champ parallèle à la plaque peut prendre des valeurs beaucoup plus élevées que dans le cas d'un champ normal, ce qui fait que même si la composante tangentielle du champ est de faible valeur, la variation de fréquence correspondante peut prendre une valeur importante et expliquer que la variation de fréquence après diffusion puisse dépasser la variation initiale.

Il n'est quère possible dans l'état actuel de cette étude de soutenir quantitativement cette hypothèse, cela suppose en effet la connaissance de la répartition du potentiel dans le plan du cristal qui ne peut être obtenue que grâce à un modèle de diffusion bi- ou tri-dimensionnel beaucoup plus complexe à traiter. En outre, l'étude de l'effet électroélastique dû à un champ parallèle a été menée uniquement dans le cas homogène à cause de l'impossibilité d'établir avec précision les conditions aux limites sur les bords du résonateur.

En dépit de ces difficultés, les points représentés sur la Fig. 26.1 peuvent être utilisés si l'on admet que l'anisotropie de la diffusion provoque simplement une homothétie de la courbe calculée au §21.4, le rapport d'homothétie étant fixé par la position relative des deux asymptotes, le centre étant le point de coordonnées (0,1).

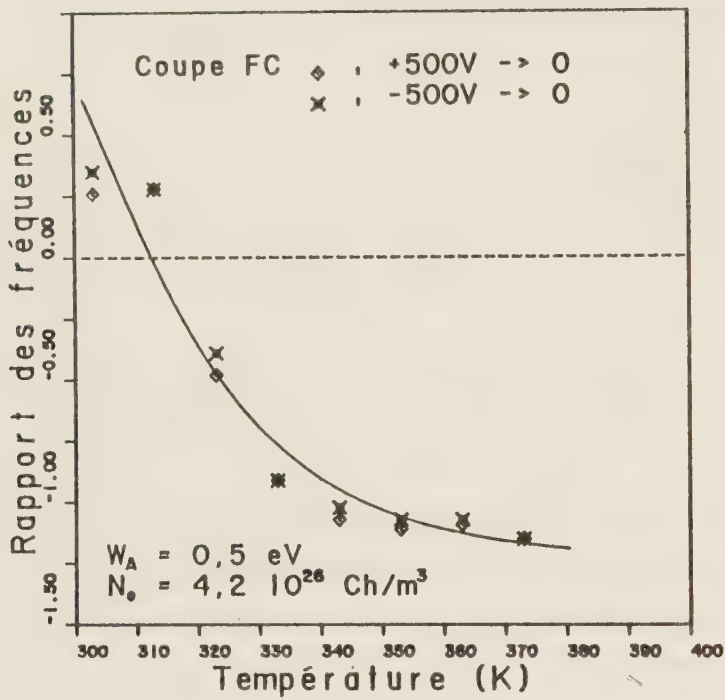


Fig. 26.1 (a)
voir légende
page suivante

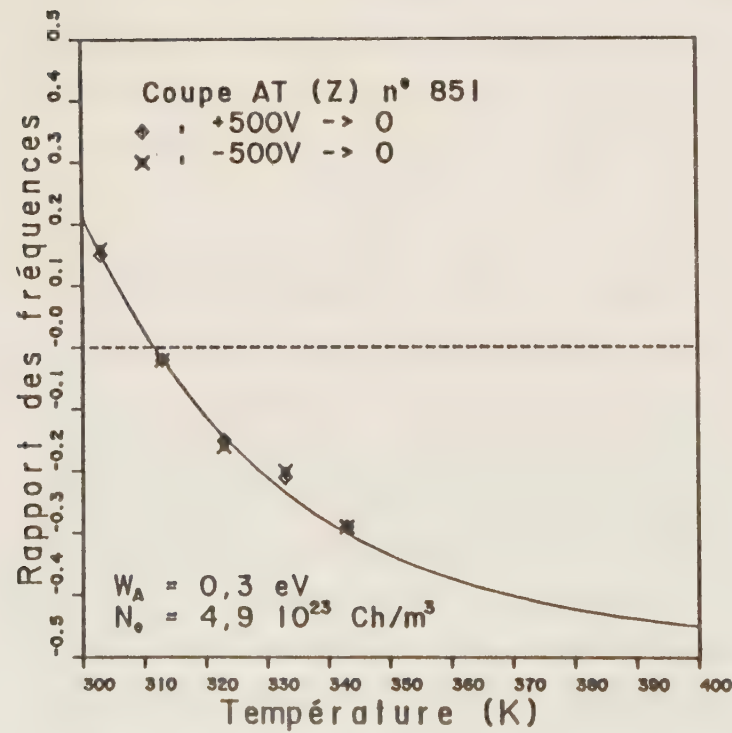


Fig. 26.1 (b)
voir légende
page suivante

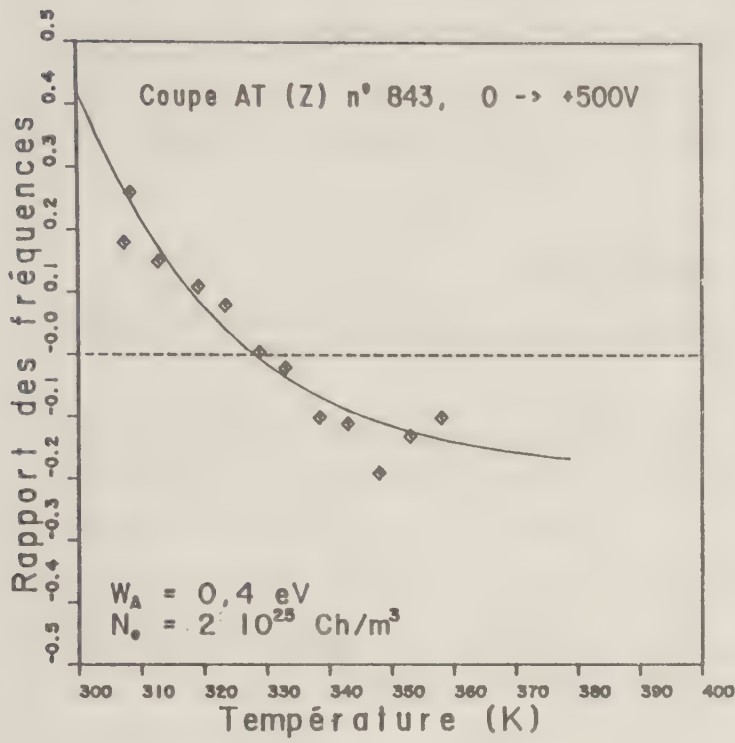


Fig. 26.1 (c)

Fig. 26.1 : Rapport entre la variation de fréquence après et avant diffusion observé expérimentalement, la courbe continue est obtenue par homothétie d'une des courbes théoriques représentées Fig. 21.5.

La comparaison de la courbe théorique ainsi corrigée avec la courbe expérimentale permet d'accéder à l'ordre de grandeur du couple (N_o, W_a) : concentration totale d'impuretés et énergie d'ionisation.

Ainsi, les courbes continues de la Fig. 26.1 sont homothétiques des courbes décrites par les relations (21.7) et (21.10) (cf. Fig. 21.3-21.5) et la comparaison avec les valeurs expérimentales donne les résultats indiqués sur le tableau 26.A.

Tableau 26.A

Estimation des énergies d'activation et de la concentration d'impuretés obtenues à partir des mesures de relaxation en champ fort

Echantillon	Rapport d'homothétie	Energie d'ionisation	Concentration
Coupe FC	2,25	0,5 eV	$4,2 \cdot 10^{26}$ ($\approx 16\%$)
Coupe AT (Z) n° 851	1,5	0,3 eV	$4,9 \cdot 10^{23}$ (18,5 ppm)
Coupe AT (Z) n° 843	1,2	0,4 eV	$2 \cdot 10^{25}$ (750 ppm)

Il ne s'agit là que d'estimations grossières mais l'ordre de grandeur des valeurs obtenues peut être considéré comme satisfaisant compte tenu des hypothèses qui ont été faites.

Une détermination plus précise de l'énergie d'ionisation et de la concentration totale d'impuretés nécessite comme cela a déjà été souligné, un modèle de résonateur plus raffiné.

26.2. Comportement de la fréquence au moment de la mise sous tension

La Fig. 24.1 montre que la fréquence du résonateur au moment de la mise sous tension présente une allure notablement différente de celle qui suit la déconnexion : pendant la mise sous tension on observe des paliers et même des contre pentes qui n'apparaissent pas après la déconnexion. Dans le cas des coupes AT électrodes en Z, ce comportement paraît erratique mais dans le cas des coupes FC le phénomène est au contraire relativement reproductible comme le montre la Fig. 26.2 sur laquelle plusieurs enregistrements successifs sont représentés.

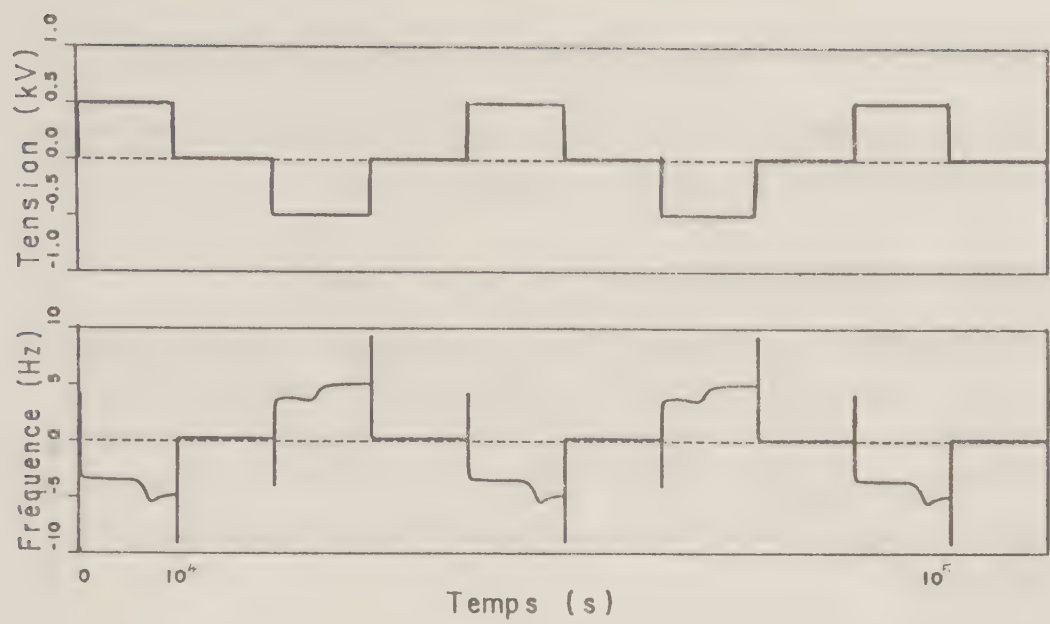


Fig. 26.2 :Enregistrements de l'évolution de la fréquence pour des cycles successifs de haute tension. Remarquer que le comportement anormal de la fréquence, consécutif à la mise sous tension, est reproductible et n'apparaît pas lors de la déconnexion.

Cette particularité n'a pas encore reçu d'explication satisfaisante, quand on suggère par exemple que l'évolution du champ électrique dans le cristal provoque le "piégeage" de charges électriques au niveau de défauts structuraux ou aux interfaces, créant ainsi des zones fortement inhomogènes où le champ électrique interne peut atteindre des valeurs élevées, on comprend mal que ce phénomène disparaisse complètement lors de la déconnexion.

La reproductibilité et la sensibilité de cette évolution avec la température prouvent néanmoins que le phénomène comporte une information précise sur la structure interne du résonateur et justifie les efforts entrepris pour sa compréhension.

27. IDENTIFICATION DES IMPURETES : MESURE DES PERTES ACOUSTIQUES

On a vu au §18.7 comment la détermination des pertes acoustiques pouvait être utilisée pour identifier la nature des impuretés.

27.1. Dispositif expérimental

Les mesures de pertes acoustiques à basse température ont été largement décrites dans le passé [BÖMMEL,1960], [KING,1959], [GAGNEPAIN,1972].

Les basses températures sont réalisées grâce à un cryostat à hélium liquide (entre 1 et 20 K) ou à azote liquide (entre 30 et 77 K) utilisant les principes décrits dans des ouvrages tels que [CONTE,1970], [ROSE-INNES,1973], [WHITE,1979], etc.

Le dispositif expérimental utilisé au laboratoire a été mis au point et exploité par G. GOUJON et G. ROBICHON. La Fig. 27.1 représente un schéma de principe de l'installation et de la mesure [GAGNEPAIN,1981].

27.2. Résultats expérimentaux

Ils sont résumés sur la Fig. 27.2 où l'on voit apparaître le pic à 20K caractéristique de la vibration du réseau lui-même ainsi qu'un pic très net à 50K indiquant la présence de sodium (cf. tableau 18.B).

Le dispositif utilisé actuellement ne permettant pas la mesure au-delà de 80K, il est encore difficile de conclure à la nature exacte des impuretés responsables du phénomène de diffusion.

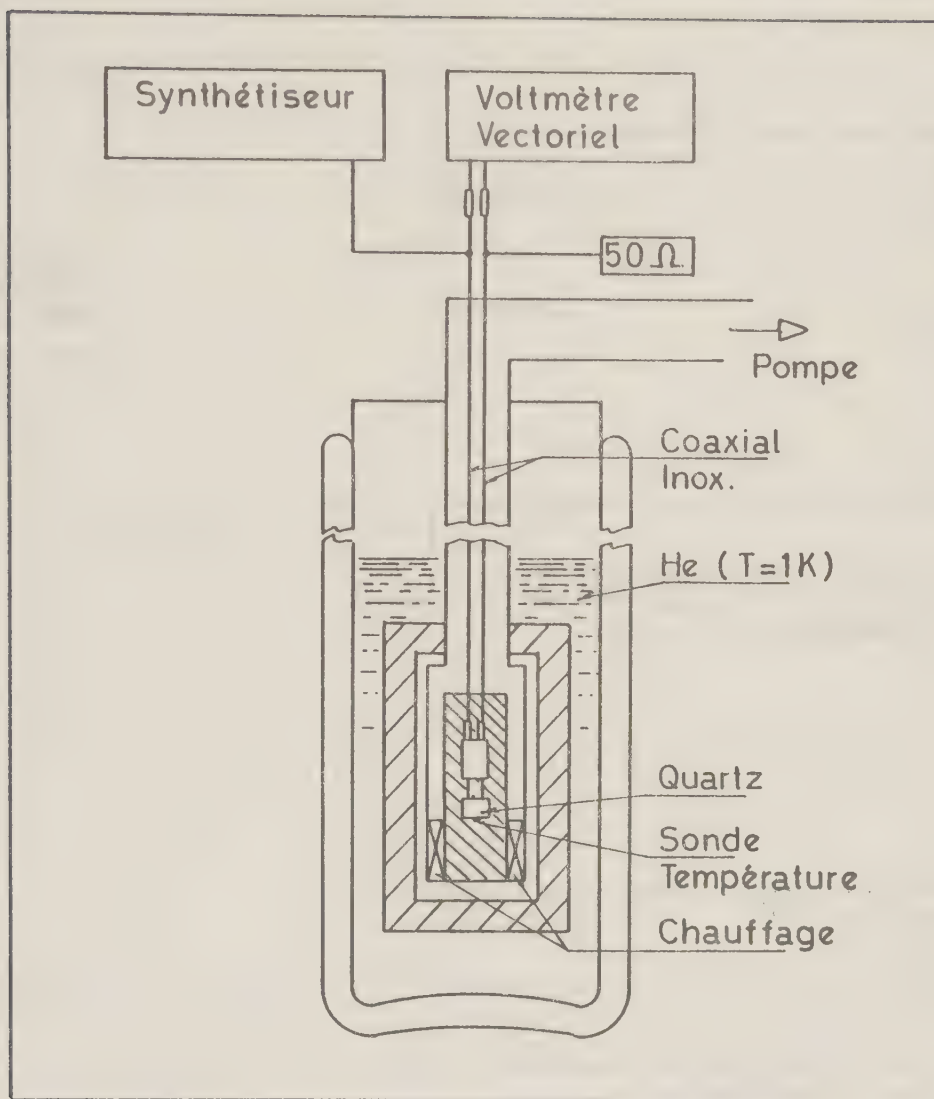


Fig. 27.1 : Schéma de principe du dispositif expérimental permettant de déterminer les pics de pertes acoustiques à basse température.

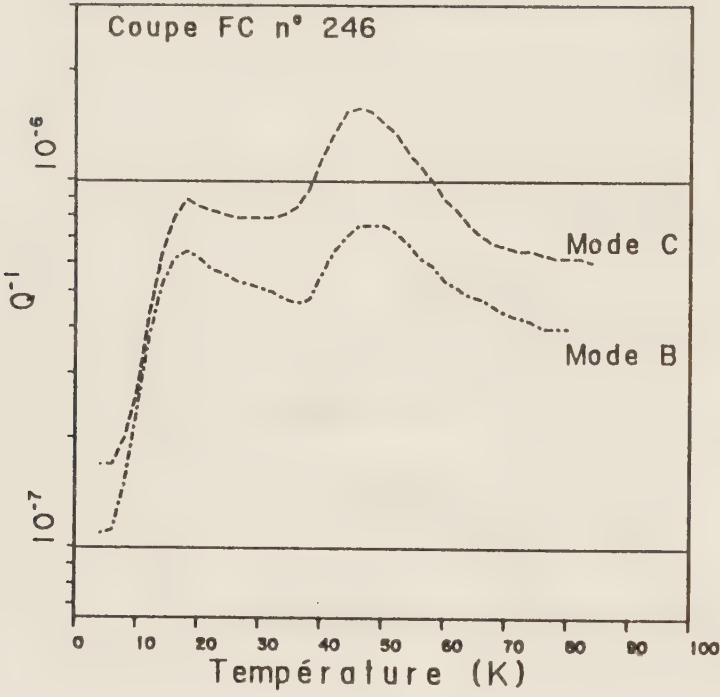


Fig. 27.2 (a)
voir légende
page suivante

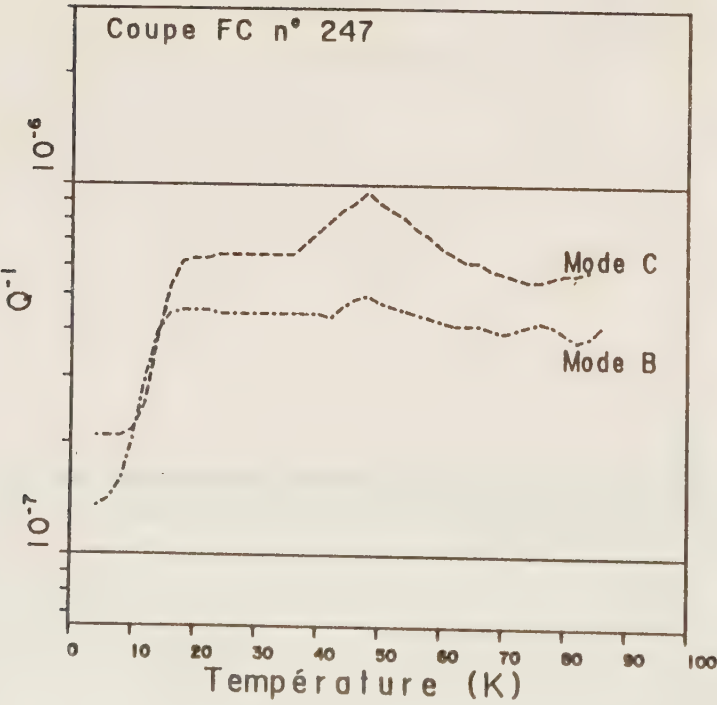


Fig. 27.2 (b)
voir légende
page suivante

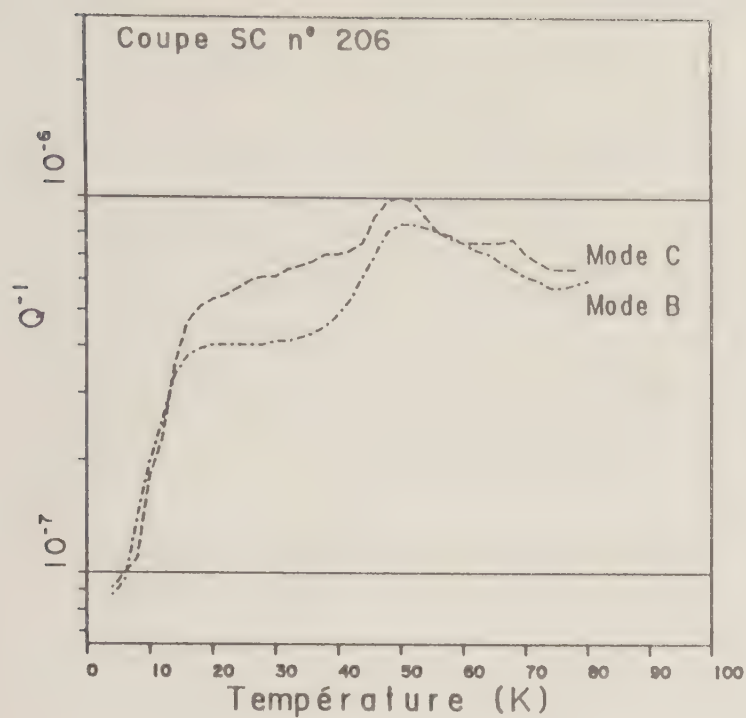


Fig. 27.2 (c)

Fig. 27.2 : Pics de pertes acoustiques observés pour différents résonateurs entre 0 et 80K. Le pic à 20K est dû aux vibrations du réseau tandis que le pic à 50K est caractéristique du sodium.

CONCLUSION

L'étude de l'effet électroélastique a permis d'une part de déterminer les coefficients piézoélectriques matériels non linéaires du quartz et d'autre part de constituer l'ébauche d'un outil d'investigation à la fois sensible et précis pour l'étude de la diffusion des impuretés dans un milieu cristallin. Sans doute cet outil n'est-il pas arrivé à son ultime degré de développement mais d'ores et déjà l'importance des résultats aussi bien théoriques qu'expérimentaux qu'il a permis d'obtenir, montre que son étude mérite d'être approfondie.

Les recherches ultérieures porteront essentiellement sur deux points :

- . Etude d'un modèle de diffusion bi- ou tri-dimensionnel destiné à expliquer quantitativement la valeur du rapport des fréquences après et avant diffusion.

- . Détermination, sur ce modèle, de l'évolution de la fréquence en fonction du temps.

L'équation de diffusion étant non linéaire, il est fort probable que sa solution ne pourra être obtenue que sous forme numérique. Il faudra, dans ce cas, étudier le moyen de confronter les résultats obtenus expérimentalement avec la solution numérique, ce qui conduira non seulement à la détermination rigoureuse des énergies d'activation du phénomène de migration, mais aussi à la constante de diffusion (ou à la mobilité) des impuretés contenues dans le cristal.

Cette analyse, principalement macroscopique, puisqu'elle utilise la fréquence de vibration du réseau tout entier comme moyen d'investigation, a besoin d'être complétée par une étude théorique microscopique indispensable pour préciser la forme des puits de potentiels dans le réseau de façon à expliquer les mécanismes exacts par lesquels les impuretés peuvent se déplacer ou vibrer au voisinage de certains sites.

A cet égard, les mesures de pertes acoustiques à basse température, conjointement aux mesures de relaxation en champ fort et de résonance magnétique effectuées sur les mêmes échantillons doivent permettre de constituer un faisceau de moyens d'investigation qui permettra de mieux comprendre les phénomènes encore mal connus de diffusion dans les cristaux covalents et l'influence des impuretés sur la stabilité de fréquence des oscillateurs à quartz.

ANNEXES

ANNEXE A

COEFFICIENTS MATERIELS DE L'ENERGIE : COEFFICIENTS INDEPENDANTS, RELATIONS DE DEPENDANCE, VALEURS NUMERIQUES

Note : les indices minuscules varient de 1 à 3 tandis que les indices majuscules varient de 1 à 6.

1. Permittivité relative du 2ème ordre [LANDOLT,1979,sec.3]

1.1. Tenseur de la classe 32

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

1.2. Relations de dépendance (classe 32) et valeurs numériques isothermes pour le quartz à 20°C [BECHMANN,1958]

ϵ_{ij}	relations
11	*
12	0
13	0
22	11
23	0
33	*

20°C	sans dim.
ϵ_{11}	4,52
ϵ_{33}	4,64

* coefficients indépendants

2. Coefficients piézoélectriques du 2ème ordre [LANDOLT,1979,sec.3]

2.1. Tenseur de la classe 32

$$\begin{bmatrix} e_{1.1} & -e_{1.1} & 0 & e_{1.4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{1.4} & -e_{1.1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2. Relations de dépendance (classe 32) et valeurs numériques pour le quartz à 20°C [CADY,1946,sec.156]

e _{m.I}	relations	e _{m.I}	relations	e _{m.I}	relations
1.1	*	2.1	0	3.1	0
1.2	-1.1	2.2	0	3.2	0
1.3	0	2.3	0	3.3	0
1.4	*	2.4	0	3.4	0
1.5	0	2.5	-1.4	3.5	0
1.6	0	2.6	-1.1	3.6	0

20°C	C/m ²
e _{1.1}	-0,17
e _{1.4}	0,04

Le signe des constantes piézoélectriques est celui du quartz droit conformément à la norme IEEE STD176 [IRE,1949] (cf. annexe B). Pour le quartz gauche, il convient de changer les signes⁽¹⁾.

(1) voir la remarque du §8 de cette annexe.

3. Coefficients élastiques du 2ème ordre [LANDOLT,1979,sec.1]

3.1. Tenseur de la classe 32

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & -C_{14} & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ C_{14} & -C_{14} & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{14} & C_{66} \end{bmatrix}$$

3.2. Relations de dépendance (classe 32) et valeurs numériques (à champ constant pour le quartz) [BECHMANN,1962]

C _{IJ}	relations	C _{IJ}	relations		GPa
11	*	33	*	C ₁₁	86,74
12	*	34	0	C ₁₂	6,98
13	*	35	0	C ₁₃	11,9
14	*	36	0	C ₁₄	-17,9
15	0	44	*	C ₃₃	107,2
16	0	45	0	C ₄₄	57,9
22	11	46	0		
23	13	55	44		
24	-14	56	14		
25	0	66	$\frac{1}{2} (11-12)$		
26	0				

4. Permittivité du 3ème ordre [BESSON, 1972]

Relations de dépendance (classe 32) et valeurs numériques pour le quartz à 20°C

ϵ_{ijk}	relations
111	*
112	0
113	0
122	-111
123	0
133	0
222	0
223	0
233	0
333	0

20°C	F/V
ϵ_{111}	$240 \cdot 10^{-24}$

5. Coefficients piézoélectriques du 3ème ordre (coefficients électroélastiques)

Relations de dépendance (classe 32) et valeurs numériques pour le quartz à 20°C (cf. tableau 16.1) [BRENDÉL, 1983]

$e_{i,jk}$	relations	$e_{i,jk}$	relations	$e_{i,jk}$	relations
1.11	*	2.11	0	3.11	0
1.12	$-\frac{1}{2} (1.11+1.22)$	2.12	0	3.12	0
1.13	*	2.13	0	3.13	0
1.14	*	2.14	0	3.14	0
1.15	0	2.15	-1.24	3.15	*
1.16	0	2.16	$\frac{1}{4} (1.11+3 \times 1.22)$	3.16	0
1.22	*	2.22	0	3.22	0
1.23	-1.13	2.23	0	3.23	0
1.24	*	2.24	0	3.24	0
1.25	0	2.25	-1.14	3.25	-3.15
1.26	0	2.26	$-\frac{1}{4} (3 \times 1.11+1.22)$	3.26	0
1.33	0	2.33	0	3.33	0
1.34	*	2.34	0	3.34	0
1.35	0	2.35	-1.34	3.35	0
1.36	0	2.36	-1.13	3.36	0
1.44	*	2.44	0	3.44	0
1.45	0	2.45	1.44	3.45	0
1.46	0	2.46	$\frac{1}{2} (1.14-1.24)$	3.46	-3.15
1.55	-1.44	2.55	0	3.55	0
1.56	$\frac{1}{2} (1.24-1.14)$	2.56	0	3.56	0
1.66	$-\frac{1}{2} (1.11+1.22)$	2.66	0	3.66	0

20°C	$e_{1.11}$	$e_{1.13}$	$e_{1.14}$	$e_{1.22}$	$e_{1.24}$	$e_{1.34}$	$e_{1.44}$	$e_{3.15}$
C/m ²	-2,73	-12	33,40	3,05	34,57	50,46	-0,604	24,90

Le signe des constantes électroélastiques est donné pour le quartz droit conformément à la norme IEEE STD 176 [IRE, 1949] (cf. annexe 8). Pour le quartz gauche, il convient de changer tous les signes⁽¹⁾.

(1) Voir la remarque du § 8 de cette annexe

6. Coefficients piézoélectriques du 3ème ordre (coefficients d'électrostriction)

. Relations de dépendance pour la classe 32 [GAGNEPAIN,1972,1975].

$e_{mn.I}$	relations	$e_{mn.I}$	relations
11.1	*	22.1	11.2
11.2	*	22.2	11.1
11.3	*	22.3	11.3
11.4	*	22.4	-11.4
11.5	0	22.5	0
11.6	0	22.6	0
12.1	0	23.1	13.6
12.2	0	23.2	-13.6
12.3	0	23.3	0
12.4	0	23.4	13.5
12.5	11.4	23.5	0
12.6	$\frac{1}{2} (11.1-11.2)$	23.6	0
13.1	0	33.1	*
13.2	0	33.2	33.1
13.3	0	33.3	*
13.4	0	33.4	0
13.5	*	33.5	0
13.6	*	33.6	0

7. Coefficients élastiques du 3e ordre [LANDOLT,1979,Sec.2]

. Relations de dépendance pour la classe 32 et valeurs numériques pour le quartz à 25°C [THURSTON,1966]

C _{ijk}	relations	C _{ijk}	relations	C _{ijk}	relations
111	*	222	*	333	*
112	*	223	113	334	0
113	*	224	- (114+2×124)	335	0
114	*	225	0	336	0
115	0	226	0	344	*
116	0	233	133	345	0
122	111+112-222	234	-134	346	0
123	*	235	0	355	344
124	*	236	0	356	134
125	0	244	155	366	$\frac{1}{2} (113-123)$
126	0	245	0		
133	*	246	0	444	*
134	*	255	144	445	0
135	0	256	$\frac{1}{2} (114-124)$	446	0
136	0	266	$\frac{1}{4} (2\times 111-112-222)$	455	-444
144	*			456	$\frac{1}{8} (111-3\times 112+2\times 123)$
145	0			466	124
146	0				
155	*			555	0
156	$\frac{1}{2} (114+3\times 124)$			556	0
166	$-\frac{1}{4} (2\times 111+112-3\times 222)$				
				666	0

Les relations de dépendance sont données conformément aux définitions tensorielles de [BRUGGER,1965]

2°C	GPa	2°C	GPa
C ₁₁₁	-210	C ₁₃₄	2
C ₁₁₂	-345	C ₁₄₄	-134
C ₁₁₃	13	C ₁₅₅	-200
C ₁₁₄	-163	C ₂₂₂	-332
C ₁₂₃	-294	C ₃₃₃	-815
C ₁₂₄	- 15	C ₃₄₄	-110
C ₁₃₃	-312	C ₄₄₄	-276

8. Remarque sur les coefficients piézoélectriques

La norme en vigueur de 1949 à 1978 [IRE,1949] a été modifiée à partir de cette date. La nouvelle convention [IEEE, 1978] intervertit les axes des cristaux droits et gauches, ce qui modifie les signes des coefficients piézoélectriques directs et inverses de la façon suivante :

		Standard 1949	Standard 1978
quartz droit	d ₁₁	< 0	> 0
	d ₁₄	< 0	< 0
	e ₁₁	< 0	> 0
	e ₁₄	> 0	> 0
quartz gauche	d ₁₁	> 0	< 0
	d ₁₄	> 0	> 0
	e ₁₁	> 0	< 0
	e ₁₄	< 0	< 0

Les coefficients électroélastiques figurant dans ce mémoire ont été calculés pour du quartz droit dans les conventions du standard 1949.

ANNEXE B

CONVENTION D'ORIENTATION DES PLAQUES [IRE, 1949]

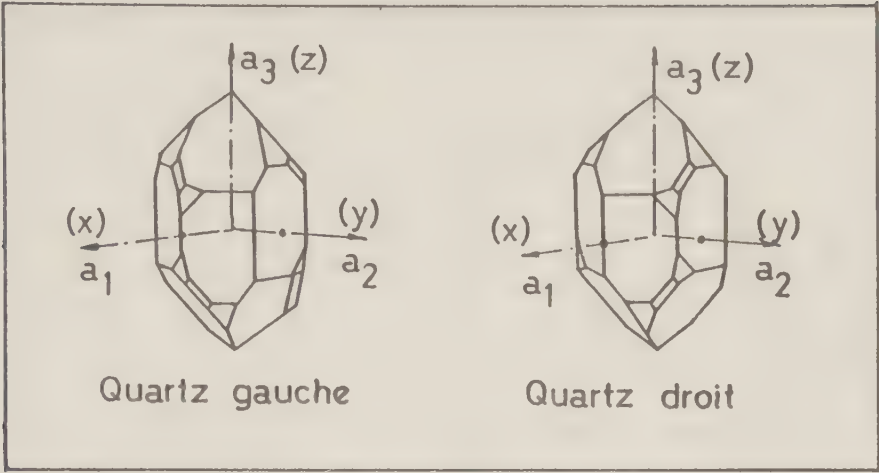


Fig. B.1 : Les deux formes énantiomorphes du quartz

Pour le quartz, le repère cristallographique est constitué par un axe $0a_3$ correspondant à l'axe d'ordre 3 du cristal (axe optique) et un axe $0a_1$ correspondant à l'un des axes d'ordre 2 du cristal (axe électrique), l'axe $0a_2$ étant orienté de telle sorte que le repère $\{0, a_1, a_2, a_3\}$ soit orthogonal direct quel que soit le type de quartz (droit ou gauche) (cf. Fig. B.1).

Pour orienter une plaque, on désigne sa longueur par l , sa largeur par w et son épaisseur par t . La position initiale de la plaque (avant rotation) est désignée par deux lettres : la première indique l'axe parallèle à l'épaisseur et la seconde l'axe parallèle à la longueur de la plaque (Fig. B.2).

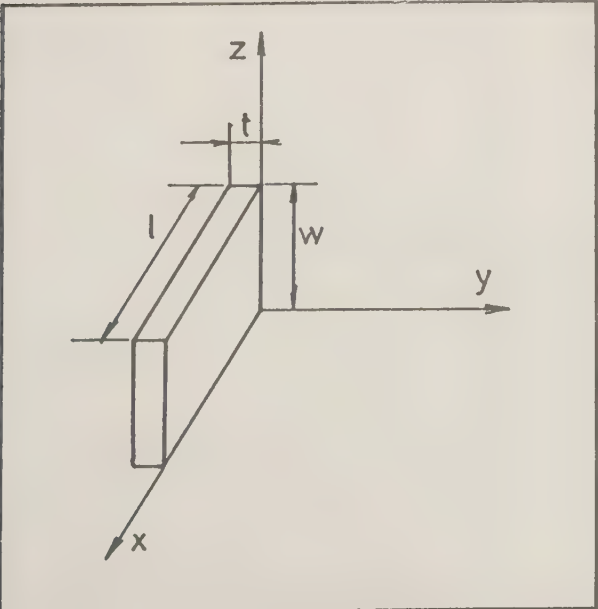


Fig. B.2
Coupe (yx)

Les lettres suivantes dans la désignation d'une coupe indiquent les côtés de la plaque suivant lesquels les rotations ont été effectuées et la valeur des angles de rotation.

Pour une coupe à simple rotation coupe AT par exemple, la désignation est la suivante : $(yx\ell)_{35^{\circ}15'}$ (cf. Fig. B.3)

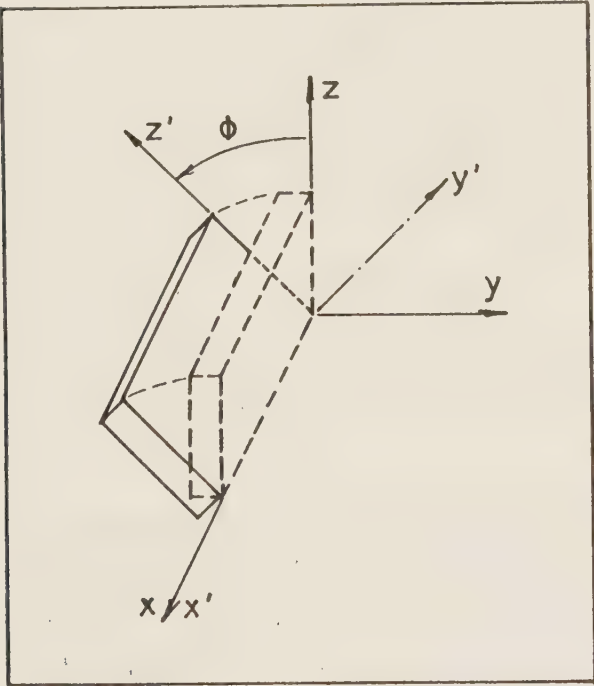


Fig. B.3
Coupe $(yx\ell)_{\phi}$

Pour une coupe à double rotation, on précise deux côtés et deux angles de rotation (Fig. B.4).

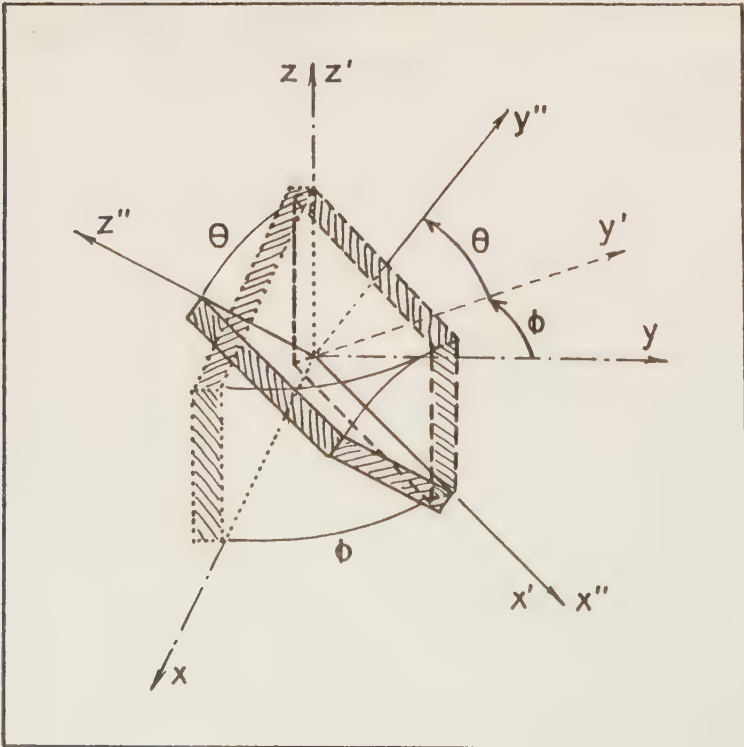


Fig. B.4
Coupe $(yxw\ell)_{\phi,\theta}$

GROUPES DE LAUE, GROUPES PONCTUELS ET GENERATEURS

- (a) Nom usuel des systèmes cristallins
 (b) Groupes de LAUE [THURSTON, 1974, sec.15]
 (c) Groupes de LAUE [LANDOLT, 1979, sec.2]
 (d) Générateurs pour les tenseurs de rang pair [THURSTON, 1974, sec.15]
 (cf. Annexe D)
 (e) Symboles de Hermann-Mauguin pour les classes cristallines
 (f) Symboles de Schoenflies
 (g) Générateurs pour les tenseurs de rang impair [BIRSS, 1963]

système cristallin (a)	groupe de LAUE (b)	générateur (c)	générateur (d)	classes cristallines (groupes ponctuels) (e) (f)		générateurs (g)
Triclinique	N	I	R^1	1 $\bar{1}$	C_1 C_i	R^1 $-R^1$
Monoclinique	M	II	R^2_z	2 $\bar{2}$ 2/m	C_2 C_s C_{2h}	R^2_z $-R^2_z$ $-R^1, R^2_z$
Orthorhombique	O	III	R^2_x, R^2_z	222 mm2 mmm	D_2 C_{2v} D_{2h}	R^2_x, R^2_z $-R^2_x, R^2_z$ $-R^1, R^2_x, R^2_z$
Tetragonal	III	IVa	R^4_z	4 $\bar{4}$ 4/m	C_4 S_4 C_{4h}	R^4_z $-R^4_z$ $-R^1, R^4_z$
	II	IVb	R^4_z, R^2_x	422 4mm $\bar{4}2m$ 4/mmm	D_4 C_{4v} D_{2d} D_{4h}	R^2_x, R^4_z $-R^2_x, R^4_z$ $R^2_x, -R^4_z$ $-R^1, R^2_x, R^4_z$
Rhombohedral (trigonal)	RII	Va	R^3_z	3 $\bar{3}$	C_3 C_{3i}	R^3_z $-R^1, R^3_z$
	RI	Vb	R^2_x, R^3_z	32 3m $\bar{3}m$	D_3 C_{3v} D_{3d}	R^2_x, R^3_z $-R^2_x, R^3_z$ $-R^1, R^2_x, R^3_z$
Hexagonal	HI	VIa	R^6_z	6 $\bar{6}$ 6/m	C_6 C_{3h} C_{6h}	R^6_z $-R^6_z$ $-R^1, R^6_z$
	HI	VIb	R^2_x, R^6_z	622 6mm $\bar{6}m2$ 6/mmm	D_6 C_{6v} D_{3h} D_{6h}	R^2_x, R^6_z $-R^2_x, R^6_z$ $R^2_x, -R^6_z$ $-R^1, R^2_x, R^6_z$
Cubique (isométrique)	CII	VIIa	R^2_x, R^2_y, R^3_p	23 m3	T T_h	R^2_z, R^3_p $-R^1, R^2_z, R^3_p$
	CI	VIIb	R^4_x, R^4_y, R^4_z	432 $\bar{4}3m$ m3m	O T_d O_h	R^4_z, R^3_p $-R^4_z, R^3_p$ $-R^1, R^4_z, R^3_p$
Isotrope	I		tous			tous

ANNEXE D

MATRICES DES GENERATEURS DES CLASSES CRISTALLINES [BIRSS, 1963]

1. Définition des générateurs

On appelle axe d'ordre n d'un cristal un axe autour duquel une rotation de $2\pi/n$ permet de retrouver une configuration identique à la configuration initiale.

Dans certains cas la rotation doit être accompagnée d'une inversion pour redonner la configuration initiale. Cette transformation porte le nom de générateur.

On note R_U^n le générateur correspondant à une rotation de $2\pi/n$ autour de l'axe u et $-R_U^n$ celui d'une rotation-inversion.

Exemples :

R_Z^3 Rotation $2\pi/3$ autour de Oz

$-R_X^2$ Rotation-inversion de π autour de Ox

R_P^3 Rotation $2\pi/3$ autour de la direction $[111]$

Une classe cristalline est caractérisée par un ou plusieurs générateurs (cf. annexe C)

2. Matrices

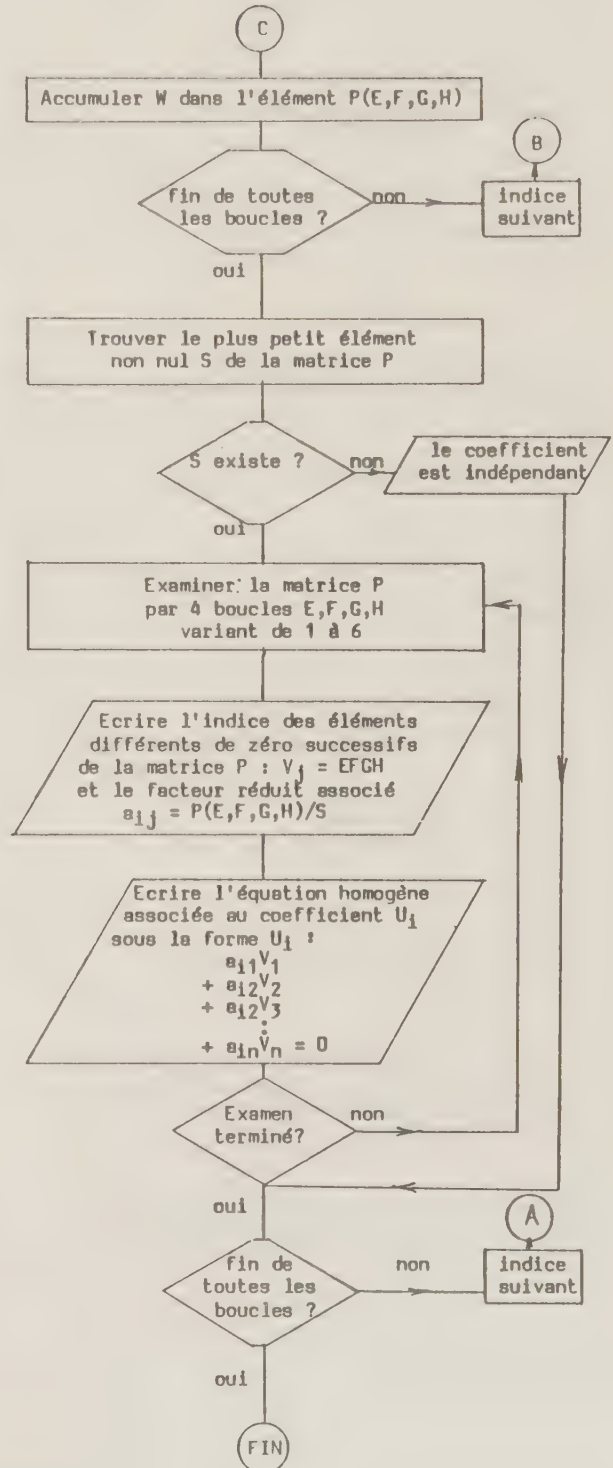
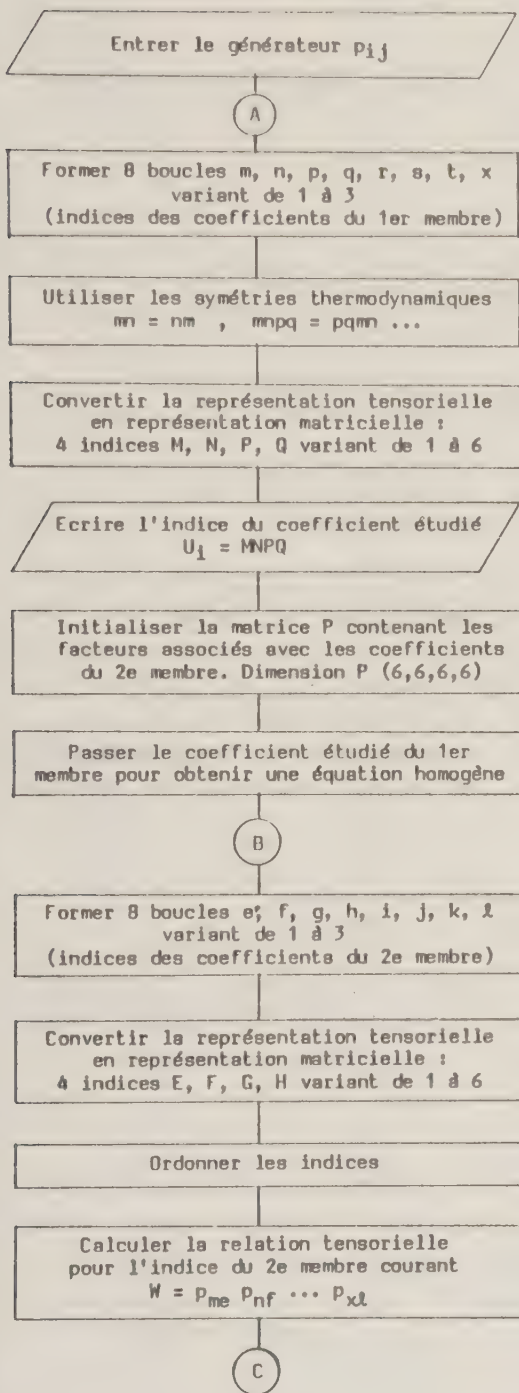
Le tableau ci-après représente les matrices des générateurs des classes cristallines (cf. colonne g tableau annexe C).

Les matrices des rotations-inversions sont obtenues en changeant le signe des éléments de la matrice de la rotation simple correspondante.

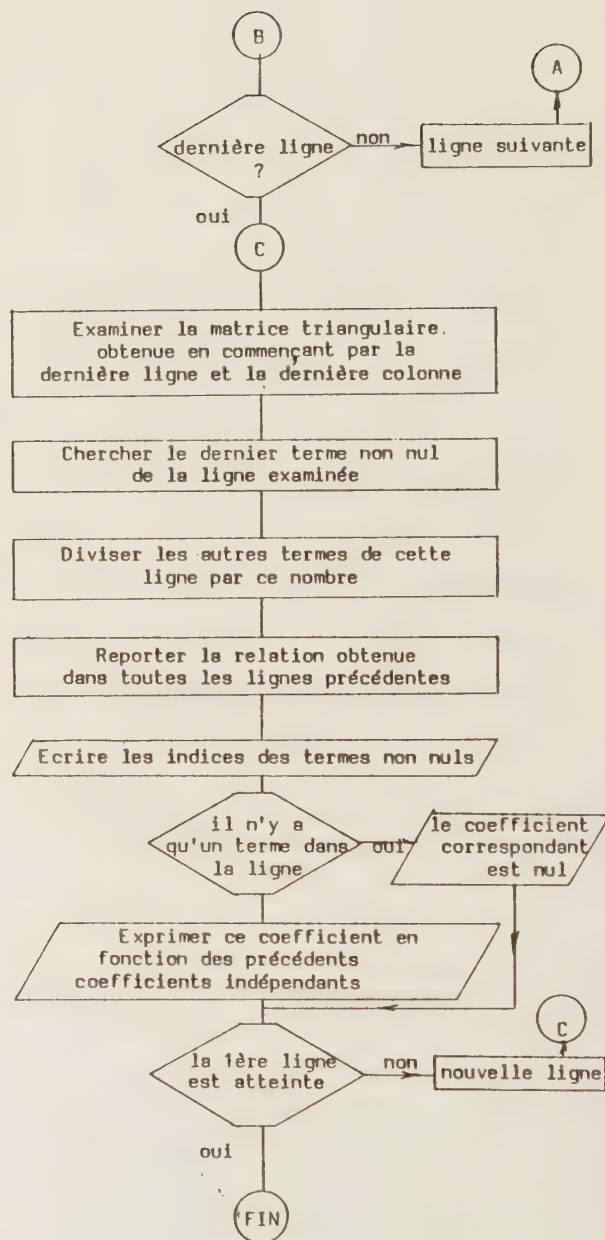
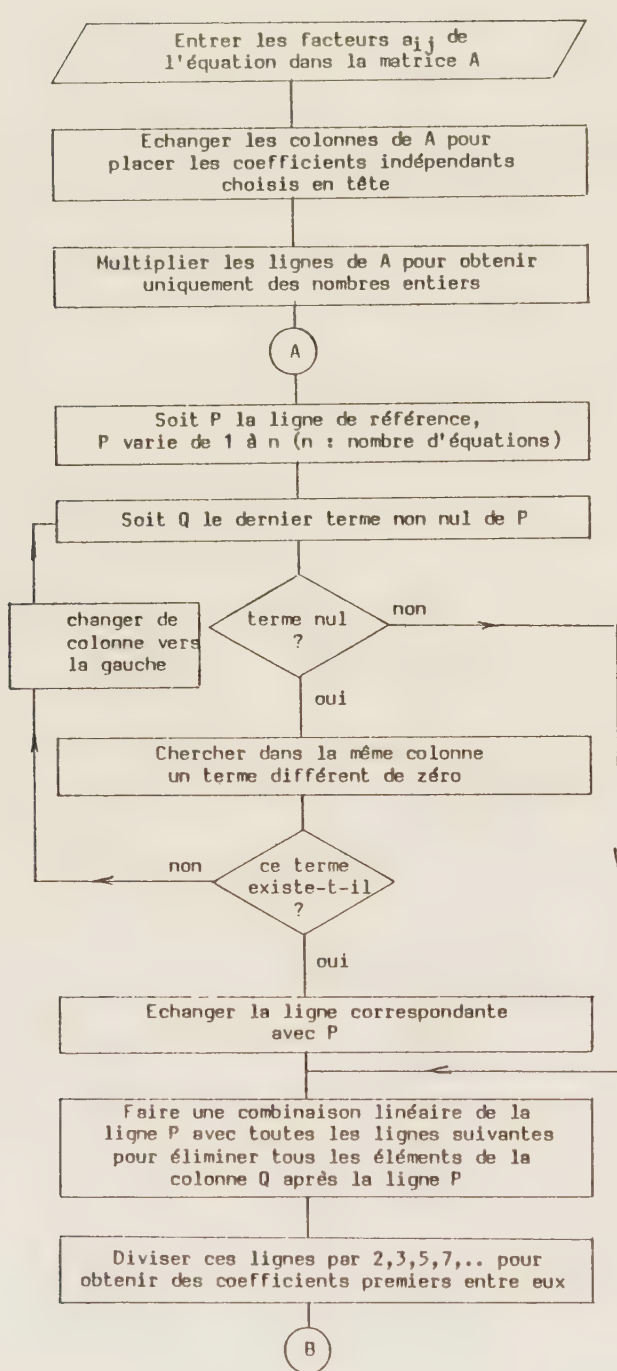
	rotation	rotation-inversion
Identité	$R^1 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Inversion $-R^1 : \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
$\pi/0x$	$R^2_x : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$-R^2_x : \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\pi/0y$	$R^2_y : \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	
$\pi/0z$	$R^2_z : \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$-R^2_z : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
$\frac{\pi}{2}/0x$	$R^4_x : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	
$\frac{\pi}{2}/0y$	$R^4_y : \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	
$\frac{\pi}{2}/0z$	$R^4_z : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$-R^4_z : \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\frac{2\pi}{3}/0z$	$R^3_z : \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
$\frac{2\pi}{3}/[111]$	$R^3_p : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	
$\frac{\pi}{3}/0z$	$R^6_z : \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$-R^6_z : \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

ORGANIGRAMMES DES PROGRAMMES DE DETERMINATION DES COEFFICIENTS ELASTIQUES DU 4e ORDRE

1. Détermination des systèmes homogènes



2. Résolution des systèmes homogènes



COEFFICIENTS ELASTIQUES INDEPENDANTS DU 4^e ORDRE POUR LES 11 GROUPES DE LAUE ET LE CAS ISOTROPE

N	H				III	II	RII	RI	HII	HI	CII	CI	I
	X	Y	Z	O									
1111	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1112	*	*	*	*	*	*	(1)	(1)	(1)	(1)	*	*	(57)
1113	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1114	*	0	0	0	0	0	*	*	0	0	0	0	0
1115	0	*	0	0	0	0	*	0	0	0	0	0	0
1116	0	0	*	0	*	0	*	0	*	0	0	0	0
1122	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1123	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	(58)
1124	*	0	0	0	0	0	(2)	(2)	0	0	0	0	0
1125	0	*	0	0	0	0	(3)	0	0	0	0	0	0
1126	0	0	*	0	*	0	(4)	0	(4)	0	0	0	0
1133	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	1122	1122	1122
1134	*	0	0	0	0	0	*	*	0	0	0	0	0
1135	0	*	0	0	0	0	*	0	0	0	0	0	0
1136	0	0	*	0	*	0	-3666	0	-3666	0	0	0	0
1144	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1145	0	0	*	0	*	0	*	0	*	0	0	0	0
1146	0	*	0	0	0	0	(5)	0	0	0	0	0	0
1155	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	(59)
1156	*	0	0	0	0	0	(6)	(6)	0	0	0	0	0
1166	*	*	*	*	*	*	(7)	(7)	(7)	(7)	*	1155	1155
1222	*	*	*	*	1112	1112	(8)	(8)	(8)	(8)	1113	1112	1112
1223	*	*	*	*	1123	1123	(9)	(9)	(9)	(9)	1123	1123	1123
1224	*	0	0	0	0	0	(10)	(10)	0	0	0	0	0
1225	0	*	0	0	0	0	(11)	0	0	0	0	0	0
1226	0	0	*	0	-1126	0	(12)	0	(12)	0	0	0	0
1233	*	*	*	*	*	*	(13)	(13)	(13)	(13)	1123	1123	1123
1234	*	0	0	0	0	0	(14)	(14)	0	0	0	0	0
1235	0	*	0	0	0	0	(15)	0	0	0	0	0	0
1236	0	0	*	0	0	0	3666	0	3666	0	0	0	0
1244	*	*	*	*	*	*	(16)	(16)	(16)	(16)	*	*	(60)
1245	0	0	*	0	0	0	(17)	0	(17)	0	0	0	0
1246	0	*	0	0	0	0	(18)	0	0	0	0	0	0
1255	*	*	*	*	1244	1244	(19)	(19)	(19)	(19)	*	1244	1244
1256	*	0	0	0	0	0	(20)	(20)	0	0	0	0	0
1266	*	*	*	*	*	*	(21)	(21)	(21)	(21)	*	*	(61)
1333	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	1112	1112	1112
1334	*	0	0	0	0	0	*	*	0	0	0	0	0
1335	0	*	0	0	0	0	*	0	0	0	0	0	0
1336	0	0	*	0	*	0	0	0	0	0	0	0	0
1344	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	1255	1244	1244
1345	0	0	*	0	*	0	3446	0	3446	0	0	0	0
1346	0	*	0	0	0	0	(22)	0	0	0	0	0	0
1355	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	1266	1266	1266
1356	*	0	0	0	0	0	(23)	(23)	0	0	0	0	0
1366	*	*	*	*	*	*	(24)	(24)	(24)	(24)	1244	1244	1244

$$(1) C_{1112} = -\frac{1}{8} C_{1111} + \frac{3}{8} C_{2222} - 2C_{6666} + \frac{3}{4} C_{1122}$$

$$(2) C_{1124} = -\frac{1}{3} C_{2224} - \frac{4}{3} C_{5666}$$

$$(3) C_{1125} = -\frac{1}{3} C_{2225} + \frac{4}{3} C_{4666}$$

$$(4) C_{1126} = -\frac{1}{3} C_{1116}$$

$$(5) C_{1146} = \frac{1}{6} C_{1115} + \frac{1}{2} C_{2225}$$

$$(6) C_{1156} = -\frac{1}{6} C_{1114} - \frac{1}{2} C_{2224}$$

$$(7) C_{1166} = -\frac{3}{16} C_{1111} + \frac{5}{16} C_{2222} + \frac{1}{3} C_{6666} - \frac{1}{8} C_{1122}$$

$$(8) C_{1222} = \frac{3}{8} C_{1111} - \frac{1}{8} C_{2222} - 2C_{6666} + \frac{3}{4} C_{1122}$$

$$(9) C_{1223} = C_{1113} - C_{2223} + C_{1123}$$

$$(10) C_{1224} = -\frac{1}{3} C_{1114} + \frac{4}{3} C_{5666}$$

$$(11) C_{1225} = -\frac{1}{3} C_{1115} - \frac{4}{3} C_{4666}$$

$$(12) C_{1226} = -\frac{1}{3} C_{1116}$$

$$(13) C_{1233} = C_{1133} - 2C_{3366}$$

$$(14) C_{1234} = -\frac{1}{2} C_{1134} - \frac{1}{2} C_{2234}$$

$$(15) C_{1235} = -\frac{1}{2} C_{1135} - \frac{1}{2} C_{2235}$$

$$(16) C_{1244} = \frac{1}{2} C_{1144} + 2C_{1155} - \frac{3}{2} C_{2244} - 2C_{4466}$$

$$(17) C_{1245} = -\frac{1}{3} C_{1145} + \frac{2}{3} C_{1446}$$

$$(18) C_{1246} = -\frac{1}{6} C_{1115} + \frac{1}{6} C_{2225} - \frac{2}{3} C_{4666}$$

$$(19) C_{1255} = \frac{1}{2} C_{1144} + C_{1155} - \frac{1}{2} C_{2244} - 2C_{4466}$$

$$(20) C_{1256} = \frac{1}{6} C_{1114} - \frac{1}{6} C_{2224} - \frac{2}{3} C_{5666}$$

$$(21) C_{1266} = \frac{1}{16} C_{1111} + \frac{1}{16} C_{2222} - \frac{1}{3} C_{6666} - \frac{1}{8} C_{1122}$$

$$(22) C_{1346} = \frac{1}{4} C_{1135} + \frac{3}{4} C_{2235}$$

$$(23) C_{1356} = -\frac{1}{4} C_{1134} - \frac{3}{4} C_{2234}$$

$$(24) C_{1366} = -\frac{1}{2} C_{1113} + \frac{3}{4} C_{2223} - \frac{1}{4} C_{1123}$$

$$(57) C_{1112} = \frac{1}{4} C_{1111} - 2C_{4444} + \frac{3}{4} C_{1122}$$

$$(58) C_{1123} = C_{1122} - 2C_{1144}$$

$$(59) C_{1155} = \frac{1}{8} C_{1111} + \frac{1}{3} C_{4444} - \frac{1}{8} C_{1122}$$

$$(60) C_{1244} = \frac{1}{16} C_{1111} - \frac{1}{2} C_{4444} - \frac{1}{16} C_{1122} + \frac{1}{2} C_{1144}$$

$$(61) C_{1266} = \frac{1}{8} C_{1111} - \frac{1}{3} C_{4444} - \frac{1}{8} C_{1122}$$

N	M			O	III	II	RII	RI	HII	HI	CII	CI	I
	X	Y	Z										
1444	*	0	0	0	0	0	*	*	0	0	0	0	0
1445	0	*	0	0	0	0	(25)	0	0	0	0	0	0
1446	0	0	*	0	*	0	*	0	*	0	0	0	0
1455	*	0	0	0	0	0	(26)	(26)	0	0	0	0	0
1456	*	*	*	*	*	*	(27)	(27)	(27)	(27)	*	*	(62)
1466	*	0	0	0	0	0	(28)	(28)	0	0	0	0	0
1555	0	*	0	0	0	0	*	0	0	0	0	0	0
1556	0	0	*	0	*	0	-1446	0	-1446	0	0	0	0
1566	0	*	0	0	0	0	(29)	0	0	0	0	0	0
1666	0	0	*	0	*	0	(30)	0	(30)	0	0	0	0

2222	*	*	*	*	1111	1111	*	*	*	*	1111	1111	1111
2223	*	*	*	*	1113	1113	*	*	*	*	1112	1112	1112
2224	*	0	0	0	0	0	*	*	0	0	0	0	0
2225	0	*	0	0	0	0	*	0	0	0	0	0	0
2226	0	0	*	0	-1116	0	1116	0	1116	0	0	0	0
2233	*	*	*	*	1133	1133	1133	1133	1133	1133	1122	1122	1122
2234	*	0	0	0	0	0	*	*	0	0	0	0	0
2235	0	*	0	0	0	0	*	0	0	0	0	0	0
2236	0	0	*	0	-1136	0	-3666	0	-3666	0	0	0	0
2244	*	*	*	*	1155	1155	*	*	*	*	1166	1155	1155
2245	0	0	*	0	-1145	0	(31)	0	(31)	0	0	0	0
2246	0	*	0	0	0	0	(32)	0	0	0	0	0	0
2255	*	*	*	*	1144	1144	(33)	(33)	(33)	(33)	1144	1144	1144
2256	*	0	0	0	0	0	(34)	(34)	0	0	0	0	0
2266	*	*	*	*	1166	1166	(35)	(35)	(35)	(35)	1155	1155	1155
2333	*	*	*	*	1333	1333	1333	1333	1333	1333	1113	1112	1112
2334	*	0	0	0	0	0	-1334	-1334	0	0	0	0	0
2335	0	*	0	0	0	0	-1335	0	0	0	0	0	0
2336	0	0	*	0	-1336	0	0	0	0	0	0	0	0
2344	*	*	*	*	1355	1355	1355	1355	1355	1355	1266	1266	1266
2345	0	0	*	0	-1345	0	-3446	0	-3446	0	0	0	0
2346	0	*	0	0	0	0	(36)	0	0	0	0	0	0
2355	*	*	*	*	1344	1344	1344	1344	1344	1344	1244	1244	1244
2356	*	0	0	0	0	0	(37)	(37)	0	0	0	0	0
2366	*	*	*	*	1366	1366	(38)	(38)	(38)	(38)	1255	1244	1244
2444	*	0	0	0	0	0	*	*	0	0	0	0	0
2445	0	*	0	0	0	0	(39)	0	0	0	0	0	0
2446	0	0	*	0	-1556	0	(40)	0	(40)	0	0	0	0
2455	*	0	0	0	0	0	(41)	(41)	0	0	0	0	0
2456	*	*	*	*	1456	1456	(42)	(42)	(42)	(42)	1456	1456	1456
2466	*	0	0	0	0	0	(43)	(43)	0	0	0	0	0
2555	0	*	0	0	0	0	*	0	0	0	0	0	0
2556	0	0	*	0	-1446	0	(44)	0	(44)	0	0	0	0
2566	0	*	0	0	0	0	(45)	0	0	0	0	0	0
2666	0	0	*	0	-1666	0	(46)	0	(46)	0	0	0	0

$$(25) C_{1445} = -\frac{1}{3} C_{1555} - \frac{2}{3} C_{2555}$$

$$(26) C_{1455} = -\frac{1}{3} C_{1444} - \frac{2}{3} C_{2444}$$

$$(27) C_{1456} = -\frac{1}{4} C_{1144} - \frac{1}{2} C_{1155} + \frac{3}{4} C_{2244}$$

$$(28) C_{1466} = -\frac{1}{6} C_{1114} - \frac{1}{6} C_{2224} + \frac{1}{3} C_{5666}$$

$$(29) C_{1566} = -\frac{1}{6} C_{1115} - \frac{1}{6} C_{2225} + \frac{1}{3} C_{4666}$$

$$(30) C_{1666} = -\frac{1}{3} C_{1116}$$

$$(31) C_{2245} = -\frac{1}{3} C_{1145} - \frac{4}{3} C_{1446}$$

$$(32) C_{2246} = -\frac{1}{2} C_{1115} - \frac{1}{6} C_{2225}$$

$$(33) C_{2255} = C_{1144} + C_{1155} - C_{2244}$$

$$(34) C_{2256} = \frac{1}{2} C_{1114} + \frac{1}{6} C_{2224}$$

$$(35) C_{2266} = \frac{5}{16} C_{1111} - \frac{3}{16} C_{2222} + \frac{1}{3} C_{6666} - \frac{1}{8} C_{1122}$$

$$(36) C_{2346} = -\frac{3}{4} C_{1135} - \frac{1}{4} C_{2235}$$

$$(37) C_{2356} = \frac{3}{4} C_{1134} + \frac{1}{4} C_{2234}$$

$$(38) C_{2366} = \frac{1}{2} C_{1113} - \frac{1}{4} C_{2223} - \frac{1}{4} C_{1123}$$

$$(39) C_{2445} = -\frac{2}{3} C_{1555} - \frac{1}{3} C_{2555}$$

$$(40) C_{2446} = \frac{2}{3} C_{1145} - \frac{1}{3} C_{1446}$$

$$(41) C_{2455} = -\frac{2}{3} C_{1444} - \frac{1}{3} C_{2444}$$

$$(42) C_{2456} = -\frac{1}{4} C_{1144} + \frac{1}{2} C_{1155} - \frac{1}{4} C_{2244}$$

$$(43) C_{2466} = -\frac{1}{6} C_{1114} - \frac{1}{6} C_{2224} - \frac{1}{3} C_{5666}$$

$$(44) C_{2556} = -\frac{2}{3} C_{1145} + \frac{1}{3} C_{1446}$$

$$(45) C_{2566} = -\frac{1}{6} C_{1115} - \frac{1}{6} C_{2225} + \frac{1}{3} C_{4666}$$

$$(46) C_{2666} = -\frac{1}{3} C_{1116}$$

$$(62) C_{1456} = \frac{1}{32} C_{1111} + \frac{1}{12} C_{4444} - \frac{1}{32} C_{1122} - \frac{1}{4} C_{1144}$$

N	M			O	III	II	RII	RI	HII	HI	CII	CI	I
	X	Y	Z										
3333	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	1111	1111	1111
3334	*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3335	0	*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3336	0	0	*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3344	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	1155	1155	1155
3345	0	0	*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3346	0	*	0	0	0	0	-1335	0	0	0	0	0	0
3355	*	*	*	*	3344	3344	3344	3344	3344	3344	1166	1155	1155
3356	*	0	0	0	0	0	1334	1334	0	0	0	0	0
3366	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	1144	1144	1144
3444	*	0	0	0	0	0	*	*	0	0	0	0	0
3445	0	*	0	0	0	0	-3555	0	0	0	0	0	0
3446	0	0	*	0	*	0	*	0	*	0	0	0	0
3455	*	0	0	0	0	0	-3444	-3444	0	0	0	0	0
3456	*	*	*	*	*	*	(47)	(47)	(47)	(47)	1456	1456	1456
3466	*	0	0	0	0	0	(48)	(48)	0	0	0	0	0
3555	0	*	0	0	0	0	*	0	0	0	0	0	0
3556	0	0	*	0	-3446	0	-3446	0	-3446	0	0	0	0
3566	0	*	0	0	0	0	(49)	0	0	0	0	0	0
3666	0	0	*	0	0	0	*	0	*	0	0	0	0
4444	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
4445	0	0	*	0	*	0	0	0	0	0	0	0	0
4446	0	*	0	0	0	0	(50)	0	0	0	0	0	0
4455	*	*	*	*	*	*	(51)	(51)	(51)	(51)	*	*	(51)
4456	*	0	0	0	0	0	(52)	(52)	0	0	0	0	0
4466	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	4455	4455	4455
4555	0	0	*	0	-4445	0	0	0	0	0	0	0	0
4556	0	*	0	0	0	0	(53)	0	0	0	0	0	0
4566	0	0	*	0	0	0	(54)	0	(54)	0	0	0	0
4666	0	*	0	0	0	0	*	0	0	0	0	0	0
5555	*	*	*	*	4444	4444	4444	4444	4444	4444	4444	4444	4444
5556	*	0	0	0	0	0	(55)	(55)	0	0	0	0	0
5566	*	*	*	*	4466	4466	(56)	(56)	(56)	(56)	4455	4455	4455
5666	*	0	0	0	0	0	*	*	0	0	0	0	0
6666	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	4444	4444	4444

$$(47) C_{3456} = -\frac{1}{2} C_{1344} + \frac{1}{2} C_{1355}$$

$$(48) C_{3466} = -\frac{1}{2} C_{1134} - \frac{1}{2} C_{2234}$$

$$(49) C_{3566} = -\frac{1}{2} C_{1135} - \frac{1}{2} C_{2235}$$

$$(50) C_{4446} = -\frac{1}{2} C_{1555} + \frac{1}{2} C_{2555}$$

$$(51) C_{4455} = \frac{1}{3} C_{4444}$$

$$(52) C_{4456} = \frac{1}{6} C_{1444} - \frac{1}{6} C_{2444}$$

$$(53) C_{4556} = -\frac{1}{6} C_{1555} + \frac{1}{6} C_{2555}$$

$$(54) C_{4566} = -\frac{1}{3} C_{1145} + \frac{2}{3} C_{1446}$$

$$(55) C_{5556} = \frac{1}{2} C_{1444} - \frac{1}{2} C_{2444}$$

$$(56) C_{5566} = -C_{1155} + C_{2244} + C_{4466}$$

Pour les notations utilisées cf. Annexe C

Le cas monoclinique envisage les trois possibilités d'orientation de l'axe d'ordre 2 : suivant Ox, Oy ou Oz.

ANNEXE G

FORMULES DE ROTATION MATRICIELLES AUTOUR D'UN AXE

Les formules suivantes ont été établies à partir des formules générales de rotation tensorielle (cf. §7) ; elles expriment, en notation matricielle, le coefficient B après rotation en fonction du coefficient A avant rotation et des lignes trigonométriques de l'angle de rotation autour de l'un des axes OX, OY ou OZ.

Elles sont données pour les coefficients élastiques du 2e ordre (tenseur de rang 4), pour les coefficients électroélastiques (tenseur de rang 5) et pour les coefficients élastiques du 3e ordre (tenseur de rang 6).

Seules les symétries thermodynamiques ont été appliquées puisqu'après une première rotation, tous les coefficients peuvent réapparaître. Cela permet d'envisager une rotation autour d'un axe quelconque par référence successive à une, deux ou trois rotations simples (cf. Annexe B).

L'originalité de ces formules réside dans le fait qu'elles ont été entièrement réalisées par ordinateur (y compris l'écriture) de telle sorte qu'aucune erreur de transcription ne puisse se produire.

ROTATION D'UN TENSEUR DE RANG 4 D'UN ANGLE ϕ AUTOUR DE OX

LIRE , $S = \sin \phi$, $C = \cos \phi$, $C^2 = \cos^2 \phi$, $S^3 = \sin^3 \phi$, ETC

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= A_{11} \\
 B_{12} &= (+S)A_{13} + (+C)A_{16} \\
 B_{13} &= (+C)A_{13} + (-S)A_{16} \\
 B_{12} &= (+C^2)A_{12} + (+S^2)A_{13} + (+2CS)A_{14} \\
 B_{14} &= (-CS)A_{12} + (+CS)A_{13} + (+C^2 - S^2)A_{14} \\
 B_{13} &= (+S^2)A_{12} + (+C^2)A_{13} + (-2CS)A_{14} \\
 B_{66} &= (+S^2)A_{55} + (+2CS)A_{56} + (+C^2)A_{66} \\
 B_{56} &= (+CS)A_{55} + (+C^2 - S^2)A_{56} + (-CS)A_{66} \\
 B_{26} &= (+C^2S)A_{25} + (+C^3)A_{26} + (+S^3)A_{35} \\
 &\quad + (+CS^2)A_{36} + (+2CS^2)A_{45} + (+2C^2S)A_{46} \\
 B_{46} &= (-CS^2)A_{25} + (-C^2S)A_{26} + (+CS^2)A_{35} \\
 &\quad + (+C^2S)A_{36} + (+C^2S - S^3)A_{45} + (+C^3 - CS^2)A_{46} \\
 B_{36} &= (+S^3)A_{25} + (+CS^2)A_{26} + (+C^2S)A_{35} \\
 &\quad + (+C^3)A_{36} + (-2CS^2)A_{45} + (-2C^2S)A_{46} \\
 B_{55} &= (+C^2)A_{55} + (-2CS)A_{56} + (+S^2)A_{66} \\
 B_{25} &= (+C^3)A_{25} + (-C^2S)A_{26} + (+CS^2)A_{35} \\
 &\quad + (-S^3)A_{36} + (+2C^2S)A_{45} + (-2CS^2)A_{46} \\
 B_{45} &= (-C^2S)A_{25} + (+CS^2)A_{26} + (+C^2S)A_{35} \\
 &\quad + (-CS^2)A_{36} + (+C^3 - CS^2)A_{45} + (-C^2S + S^3)A_{46} \\
 B_{35} &= (+CS^2)A_{25} + (-S^3)A_{26} + (+C^3)A_{35} \\
 &\quad + (-C^2S)A_{36} + (-2C^2S)A_{45} + (+2CS^2)A_{46} \\
 B_{22} &= (+C^4)A_{22} + (+2C^2S^2)A_{23} + (+4C^3S)A_{24} \\
 &\quad + (+S^4)A_{33} + (+4CS^3)A_{34} + (+4C^2S^2)A_{44} \\
 B_{24} &= (-C^3S)A_{22} + (+C^3S - CS^3)A_{23} + (+C^4 - 3C^2S^2)A_{24} \\
 &\quad + (+CS^3)A_{33} + (+3C^2S^2 - S^4)A_{34} + (+2C^3S - 2CS^3)A_{44} \\
 B_{23} &= (+C^2S^2)A_{22} + (+C^4 + S^4)A_{23} + (-2C^3S + 2CS^3)A_{24} \\
 &\quad + (+C^2S^2)A_{33} + (+2C^3S - 2CS^3)A_{34} + (-4C^2S^2)A_{44} \\
 B_{44} &= (+C^2S^2)A_{22} + (-2C^2S^2)A_{23} + (-2C^3S + 2CS^3)A_{24} \\
 &\quad + (+C^2S^2)A_{33} + (+2C^3S - 2CS^3)A_{34} + (+C^4 - 2C^2S^2 + S^4)A_{44} \\
 B_{34} &= (-CS^3)A_{22} + (-C^3S + CS^3)A_{23} + (+3C^2S^2 - S^4)A_{24} \\
 &\quad + (+C^3S)A_{33} + (+C^4 - 3C^2S^2)A_{34} + (-2C^3S + 2CS^3)A_{44} \\
 B_{33} &= (+S^4)A_{22} + (+2C^2S^2)A_{23} + (-4CS^3)A_{24} \\
 &\quad + (+C^4)A_{33} + (-4C^3S)A_{34} + (+4C^2S^2)A_{44}
 \end{aligned}$$

ROTATION D'UN TENSEUR DE RANG 4 D'UN ANGLE ϕ AUTOUR DE OY

LIRE : $S = \sin\phi$, $C = \cos\phi$, $C^2 = \cos^2\phi$, $S^2 = \sin^2\phi$, ETC

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= + (\cdot C^4) A_{11} + (\cdot 2C^2S^2) A_{13} + (-4C^3S) A_{15} \\
 &+ (\cdot S^4) A_{33} + (-4CS^3) A_{35} + (\cdot 4C^2S^2) A_{55} \\
 B_{12} &= + (-C^2S) A_{14} + (\cdot C^3) A_{16} + (-S^3) A_{34} \\
 &+ (\cdot CS^2) A_{36} + (\cdot 2CS^2) A_{45} + (-2C^2S) A_{56} \\
 B_{13} &= + (\cdot C^3S) A_{11} + (-C^3S + CS^3) A_{13} + (\cdot C^4 - 3C^2S^2) A_{15} \\
 &+ (-CS^3) A_{33} + (\cdot 3C^2S^2 - S^4) A_{35} + (-2C^3S + 2CS^3) A_{55} \\
 B_{12} &= + (\cdot C^2) A_{12} + (\cdot S^2) A_{23} + (-2CS) A_{25} \\
 B_{14} &= + (\cdot C^3) A_{14} + (\cdot C^2S) A_{16} + (\cdot CS^2) A_{34} \\
 &+ (\cdot S^3) A_{36} + (-2C^2S) A_{45} + (-2CS^2) A_{56} \\
 B_{15} &= + (\cdot C^2S^2) A_{11} + (\cdot C^4 + S^4) A_{13} + (\cdot 2C^3S - 2CS^3) A_{15} \\
 &+ (\cdot C^2S^2) A_{33} + (-2C^3S + 2CS^3) A_{35} + (-4C^2S^2) A_{55} \\
 B_{66} &= + (\cdot S^2) A_{44} + (-2CS) A_{46} + (\cdot C^2) A_{66} \\
 B_{56} &= + (-CS^2) A_{14} + (\cdot C^2S) A_{16} + (\cdot CS^2) A_{34} \\
 &+ (-C^2S) A_{36} + (-C^2S + S^3) A_{45} + (\cdot C^3 - CS^2) A_{56} \\
 B_{26} &= + (-S) A_{24} + (\cdot C) A_{26} \\
 B_{46} &= + (-CS) A_{44} + (\cdot C^2 - S^2) A_{46} + (\cdot CS) A_{66} \\
 B_{36} &= + (-S^3) A_{14} + (\cdot CS^2) A_{16} + (-C^2S) A_{34} \\
 &+ (\cdot C^3) A_{36} + (-2CS^2) A_{45} + (\cdot 2C^2S) A_{56} \\
 B_{55} &= + (\cdot C^2S^2) A_{11} + (-2C^2S^2) A_{13} + (\cdot 2C^3S - 2CS^3) A_{15} \\
 &+ (\cdot C^2S^2) A_{33} + (-2C^3S + 2CS^3) A_{35} + (\cdot C^4 - 2C^2S^2 + S^4) A_{55} \\
 B_{25} &= + (\cdot CS) A_{12} + (-CS) A_{23} + (\cdot C^2 - S^2) A_{25} \\
 B_{45} &= + (\cdot C^2S) A_{14} + (\cdot CS^2) A_{16} + (-C^2S) A_{34} \\
 &+ (-CS^2) A_{36} + (\cdot C^3 - CS^2) A_{45} + (\cdot C^2S - S^3) A_{56} \\
 B_{35} &= + (\cdot CS^3) A_{11} + (\cdot C^3S - CS^3) A_{13} + (\cdot 3C^2S^2 - S^4) A_{15} \\
 &+ (-C^3S) A_{33} + (\cdot C^4 - 3C^2S^2) A_{35} + (\cdot 2C^3S - 2CS^3) A_{55} \\
 B_{22} &= + A_{22} \\
 B_{24} &= + (\cdot C) A_{24} + (\cdot S) A_{26} \\
 B_{23} &= + (\cdot S^2) A_{12} + (\cdot C^2) A_{23} + (\cdot 2CS) A_{25} \\
 B_{44} &= + (\cdot C^2) A_{44} + (\cdot 2CS) A_{46} + (\cdot S^2) A_{66} \\
 B_{34} &= + (\cdot CS^2) A_{14} + (\cdot S^3) A_{16} + (\cdot C^3) A_{34} \\
 &+ (\cdot C^2S) A_{36} + (\cdot 2C^2S) A_{45} + (\cdot 2CS^2) A_{56} \\
 B_{33} &= + (\cdot S^4) A_{11} + (\cdot 2C^2S^2) A_{13} + (\cdot 4CS^3) A_{15} \\
 &+ (\cdot C^4) A_{33} + (\cdot 4C^3S) A_{35} + (\cdot 4C^2S^2) A_{55}
 \end{aligned}$$

ROTATION D'UN TENSEUR DE RANG 4 D'UN ANGLE ϕ AUTOUR DE OZ

LIRE : $S = \sin \phi$, $C = \cos \phi$, $C^2 = \cos^2 \phi$, $S^3 = \sin^3 \phi$, ETC

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= + (C^4)A_{11} + (+2C^2S^2)A_{12} + (+4C^3S)A_{16} \\
 &\quad + (+S^4)A_{22} + (+4CS^3)A_{26} + (+4C^2S^2)A_{66} \\
 B_{16} &= + (-C^3S)A_{11} + (+C^3S - CS^3)A_{12} + (+C^4 - 3C^2S^2)A_{16} \\
 &\quad + (+CS^3)A_{22} + (+3C^2S^2 - S^4)A_{26} + (+2C^3S - 2CS^3)A_{66} \\
 B_{15} &= + (+C^2S)A_{14} + (+C^3)A_{15} + (+S^3)A_{24} \\
 &\quad + (+CS^2)A_{25} + (+2CS^2)A_{46} + (+2C^2S)A_{56} \\
 B_{12} &= + (+C^2S^2)A_{11} + (+C^4 + S^4)A_{12} + (-2C^3S + 2CS^3)A_{16} \\
 &\quad + (+C^2S^2)A_{22} + (+2C^3S - 2CS^3)A_{26} + (-4C^2S^2)A_{66} \\
 B_{14} &= + (+C^3)A_{14} + (-C^2S)A_{15} + (+CS^2)A_{24} \\
 &\quad + (-S^3)A_{25} + (+2C^2S)A_{46} + (-2CS^2)A_{56} \\
 B_{13} &= + (+C^2)A_{13} + (+S^2)A_{23} + (+2CS)A_{36} \\
 B_{66} &= + (+C^2S^2)A_{11} + (-2C^2S^2)A_{12} + (-2C^3S + 2CS^3)A_{16} \\
 &\quad + (+C^2S^2)A_{22} + (+2C^3S - 2CS^3)A_{26} + (+C^4 - 2C^2S^2 + S^4)A_{66} \\
 B_{56} &= + (-CS^2)A_{14} + (-C^2S)A_{15} + (+CS^2)A_{24} \\
 &\quad + (+C^2S)A_{25} + (+C^2S - S^3)A_{46} + (+C^3 - CS^2)A_{56} \\
 B_{26} &= + (-CS^3)A_{11} + (-C^3S + CS^3)A_{12} + (+3C^2S^2 - S^4)A_{16} \\
 &\quad + (+C^3S)A_{22} + (+C^4 - 3C^2S^2)A_{26} + (-2C^3S + 2CS^3)A_{66} \\
 B_{46} &= + (-C^2S)A_{14} + (+CS^2)A_{15} + (+C^2S)A_{24} \\
 &\quad + (-CS^2)A_{25} + (+C^3 - CS^2)A_{46} + (-C^2S + S^3)A_{56} \\
 B_{36} &= + (-CS)A_{13} + (+CS)A_{23} + (+C^2 - S^2)A_{36} \\
 B_{55} &= + (+S^2)A_{44} + (+2CS)A_{45} + (+C^2)A_{55} \\
 B_{25} &= + (+S^3)A_{14} + (+CS^2)A_{15} + (+C^2S)A_{24} \\
 &\quad + (+C^3)A_{25} + (-2CS^2)A_{46} + (-2C^2S)A_{56} \\
 B_{45} &= + (+CS)A_{44} + (+C^2 - S^2)A_{45} + (-CS)A_{55} \\
 B_{35} &= + (+S)A_{34} + (+C)A_{35} \\
 B_{22} &= + (+S^4)A_{11} + (+2C^2S^2)A_{12} + (-4CS^3)A_{16} \\
 &\quad + (+C^4)A_{22} + (-4C^3S)A_{26} + (+4C^2S^2)A_{66} \\
 B_{24} &= + (+CS^2)A_{14} + (-S^3)A_{15} + (+C^3)A_{24} \\
 &\quad + (-C^2S)A_{25} + (-2C^2S)A_{46} + (+2CS^2)A_{56} \\
 B_{23} &= + (+S^2)A_{13} + (+C^2)A_{23} + (-2CS)A_{36} \\
 B_{44} &= + (+C^2)A_{44} + (-2CS)A_{45} + (+S^2)A_{55} \\
 B_{34} &= + (+C)A_{34} + (-S)A_{35} \\
 B_{33} &= + A_{33}
 \end{aligned}$$

ROTATION D'UN TENSEUR DE RANG 5 D'UN ANGLE Φ AUTOUR DE OX

 LIRE , $S = \sin \Phi$, $C = \cos \Phi$, $C^2 = \cos^2 \Phi$, $S^3 = \sin^3 \Phi$, ETC

$$B_{111} = +A_{111}$$

$$B_{116} = +(+S)A_{119} + (+C)A_{116}$$

$$B_{115} = +(+C)A_{119} + (-S)A_{116}$$

$$B_{112} = +(+C^2)A_{112} + (+S^2)A_{113} + (+2CS)A_{114}$$

$$B_{114} = +(-CS)A_{112} + (+CS)A_{113} + (+C^2 - S^2)A_{114}$$

$$B_{113} = +(+S^2)A_{112} + (+C^2)A_{113} + (-2CS)A_{114}$$

$$B_{166} = +(+S^2)A_{155} + (+2CS)A_{156} + (+C^2)A_{166}$$

$$B_{156} = +(+CS)A_{155} + (+C^2 - S^2)A_{156} + (-CS)A_{166}$$

$$B_{126} = +(+C^2S)A_{125} + (+C^3)A_{126} + (+S^3)A_{135}$$

$$+ (+CS^2)A_{136} + (+2CS^2)A_{145} + (+2C^2S)A_{146}$$

$$B_{146} = +(-CS^2)A_{125} + (-C^2S)A_{126} + (+CS^2)A_{135}$$

$$+ (+C^2S)A_{136} + (+C^2S - S^3)A_{145} + (+C^3 - CS^2)A_{146}$$

$$B_{136} = +(+S^3)A_{125} + (+CS^2)A_{126} + (+C^2S)A_{135}$$

$$+ (+C^3)A_{136} + (-2CS^2)A_{145} + (-2C^2S)A_{146}$$

$$B_{155} = +(+C^2)A_{155} + (-2CS)A_{156} + (+S^2)A_{166}$$

$$B_{125} = +(+C^3)A_{125} + (-C^2S)A_{126} + (+CS^2)A_{135}$$

$$+ (-S^3)A_{136} + (+2C^2S)A_{145} + (-2CS^2)A_{146}$$

$$B_{145} = +(-C^2S)A_{125} + (+CS^2)A_{126} + (+C^2S)A_{135}$$

$$+ (-CS^2)A_{136} + (+C^3 - CS^2)A_{145} + (-C^2S + S^3)A_{146}$$

$$B_{135} = +(+CS^2)A_{125} + (-S^3)A_{126} + (+C^3)A_{135}$$

$$+ (-C^2S)A_{136} + (-2C^2S)A_{145} + (+2CS^2)A_{146}$$

$$B_{122} = +(+C^4)A_{122} + (+2C^2S^2)A_{123} + (+4C^3S)A_{124}$$

$$+ (+S^4)A_{133} + (+4CS^3)A_{134} + (+4C^2S^2)A_{144}$$

$$B_{124} = +(-C^3S)A_{122} + (+C^3S - CS^3)A_{123}$$

$$+ (+C^4 - 3C^2S^2)A_{124} + (+CS^3)A_{133} + (+3C^2S^2 - S^4)A_{134}$$

$$+ (+2C^3S - 2CS^3)A_{144}$$

$$B_{123} = +(+C^2S^2)A_{122} + (+C^4 + S^4)A_{123}$$

$$+ (-2C^3S + 2CS^3)A_{124} + (+C^2S^2)A_{133} + (+2C^3S - 2CS^3)A_{134}$$

$$+ (-4C^2S^2)A_{144}$$

$$B_{144} = +(+C^2S^2)A_{122} + (-2C^2S^2)A_{123}$$

$$+ (-2C^3S + 2CS^3)A_{124} + (+C^2S^2)A_{133} + (+2C^3S - 2CS^3)A_{134}$$

$$+ (+C^4 - 2C^2S^2 + S^4)A_{144}$$

$$B_{134} = +(-CS^3)A_{122} + (-C^3S + CS^3)A_{123}$$

$$+ (+3C^2S^2 - S^4)A_{124} + (+C^3S)A_{133} + (+C^4 - 3C^2S^2)A_{134}$$

$$+ (-2C^3S + 2CS^3)A_{144}$$

$$B_{133} = +(+S^4)A_{122} + (+2C^2S^2)A_{123} + (-4CS^3)A_{124}$$

$$+ (+C^4)A_{133} + (-4C^3S)A_{134} + (+4C^2S^2)A_{144}$$

$$B_{211} = +(+C)A_{211} + (+S)A_{311}$$

$$B_{216} = +(+CS)A_{215} + (+C^2)A_{216} + (+S^2)A_{315}$$

$$+ (+CS)A_{316}$$

$$B_{215} = +(+C^2)A_{215} + (-CS)A_{216} + (+CS)A_{315}$$

$$+ (-S^2)A_{316}$$

$$B_{212} = +(+C^3)A_{212} + (+CS^2)A_{213} + (+2C^2S)A_{214}$$

$$+ (+C^2S)A_{312} + (+S^3)A_{313} + (+2CS^2)A_{314}$$

$$B_{214} = +(-C^2S)A_{212} + (+C^2S)A_{213} + (+C^3 - CS^2)A_{214}$$

$$+ (-CS^2)A_{312} + (+CS^2)A_{313} + (+C^2S - S^3)A_{314}$$

$$B_{213} = +(+CS^2)A_{212} + (+C^3)A_{213} + (-2C^2S)A_{214}$$

$$+ (+S^3)A_{312} + (+C^2S)A_{313} + (-2CS^2)A_{314}$$

$$B_{266} = +(+CS^2)A_{255} + (+2C^2S)A_{256} + (+C^3)A_{266}$$

$$+ (+S^3)A_{355} + (+2CS^2)A_{356} + (+C^2S)A_{366}$$

$$B_{256} = +(+C^2S)A_{255} + (+C^3 - CS^2)A_{256}$$

$$+ (-C^2S)A_{266} + (+CS^2)A_{355} + (+C^2S - S^3)A_{356}$$

$$+ (-CS^2)A_{366}$$

$$B_{226} = +(+C^3S)A_{225} + (+C^4)A_{226} + (+CS^3)A_{235}$$

$$+ (+C^2S^2)A_{236} + (+2C^2S^2)A_{245} + (+2C^3S)A_{246}$$

$$+ (+C^2S^2)A_{325} + (+C^3S)A_{326} + (+S^4)A_{335}$$

$$+ (+CS^3)A_{336} + (+2CS^3)A_{345} + (+2C^2S^2)A_{346}$$

$$B_{246} = +(-C^2S^2)A_{225} + (-C^3S)A_{226} + (+C^2S^2)A_{235}$$

$$+ (+C^3S)A_{236} + (+C^3S - CS^3)A_{245} + (+C^4 - C^2S^2)A_{246}$$

$$+ (-CS^3)A_{325} + (-C^2S^2)A_{326} + (+CS^3)A_{335}$$

$$+ (+C^2S^2)A_{336} + (+C^2S^2 - S^4)A_{345} + (+C^3S - CS^3)A_{346}$$

$$B_{236} = +(+CS^3)A_{225} + (+C^2S^2)A_{226} + (+C^3S)A_{235}$$

$$+ (+C^4)A_{236} + (-2C^2S^2)A_{245} + (-2C^3S)A_{246}$$

$$+ (+S^4)A_{325} + (+CS^3)A_{326} + (+C^2S^2)A_{335}$$

$$+ (+C^3S)A_{336} + (-2CS^3)A_{345} + (-2C^2S^2)A_{346}$$

$$B_{255} = +(+C^3)A_{255} + (-2C^2S)A_{256} + (+CS^2)A_{266}$$

$$+ (+C^2S)A_{355} + (-2CS^2)A_{356} + (+S^3)A_{366}$$

$$B_{225} = +(+C^4)A_{225} + (-C^3S)A_{226} + (+C^2S^2)A_{235}$$

$$+ (-CS^3)A_{236} + (+2C^3S)A_{245} + (-2C^2S^2)A_{246}$$

$$+ (+C^3S)A_{325} + (-C^2S^2)A_{326} + (+CS^3)A_{335}$$

$$+ (-S^4)A_{336} + (+2C^2S^2)A_{345} + (-2CS^3)A_{346}$$

$$B_{245} = +(-C^3S)A_{225} + (+C^2S^2)A_{226} + (+C^3S)A_{235}$$

$$+ (-C^2S^2)A_{236} + (+C^4 - C^2S^2)A_{245} + (-C^3S + CS^3)A_{246}$$

$$+ (-C^2S^2)A_{325} + (+CS^3)A_{326} + (+C^2S^2)A_{335}$$

$$+ (-CS^3)A_{336} + (+C^3S - CS^3)A_{345} + (-C^2S^2 + S^4)A_{346}$$

$$B_{235} = +(+C^2S^2)A_{225} + (-CS^3)A_{226} + (+C^4)A_{235}$$

$$+ (-C^3S)A_{236} + (-2C^3S)A_{245} + (+2C^2S^2)A_{246}$$

$$+ (+CS^3)A_{325} + (-S^4)A_{326} + (+C^3S)A_{335}$$

$$+ (-C^2S^2)A_{336} + (-2C^2S^2)A_{345} + (+2CS^3)A_{346}$$

$$B_{222} = +(+C^5)A_{222} + (+2C^3S^2)A_{223} + (+4C^4S)A_{224}$$

$$+ (+CS^4)A_{233} + (+4C^3S^3)A_{234} + (+4C^3S^2)A_{244}$$

$$+ (+C^4S)A_{322} + (+2C^2S^3)A_{323} + (+4C^3S^2)A_{324}$$

$$+ (+S^5)A_{333} + (+4CS^4)A_{334} + (+4C^2S^3)A_{344}$$

$$B_{224} = +(-C^4S)A_{222} + (+C^4S - C^2S^3)A_{223}$$

$$+ (+C^5 - 3C^3S^2)A_{224} + (+C^2S^3)A_{233} + (+3C^3S^2 - CS^4)A_{234}$$

$$+ (+2C^4S - 2C^2S^3)A_{244} + (-C^3S^2)A_{322} + (+C^3S^2 - CS^4)A_{323}$$

$$+ (+C^4S - 3C^2S^3)A_{324} + (+CS^4)A_{333} + (+3C^3S^2 - S^5)A_{334}$$

$$+ (+2C^3S^2 - 2CS^4)A_{344}$$

$$\begin{aligned}
 B_{223} = & (+C^3S^2)A_{222} + (+C^5 + CS^4)A_{223} \\
 & + (-2C^4S + 2C^2S^3)A_{224} + (+C^3S^2)A_{233} + (+2C^4S - 2C^2S^3)A_{234} \\
 & + (-4C^3S^2)A_{244} + (+C^2S^3)A_{322} + (+C^4S + S^5)A_{323} \\
 & + (-2C^3S^2 + 2CS^4)A_{324} + (+C^2S^3)A_{333} + (+2C^3S^2 - 2CS^4)A_{334} \\
 & + (-4C^2S^3)A_{344}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{244} = & (+C^3S^2)A_{222} + (-2C^3S^2)A_{223} \\
 & + (-2C^4S + 2C^2S^3)A_{224} + (+C^3S^2)A_{233} + (+2C^4S - 2C^2S^3)A_{234} \\
 & + (+C^5 - 2C^3S^2 + CS^4)A_{244} + (+C^2S^3)A_{322} + (-2C^2S^3)A_{323} \\
 & + (-2C^3S^2 + 2CS^4)A_{324} + (+C^2S^3)A_{333} + (+2C^3S^2 - 2CS^4)A_{334} \\
 & + (+C^4S - 2C^2S^3 + S^5)A_{344}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{234} = & (-C^2S^3)A_{222} + (-C^4S + C^2S^3)A_{223} \\
 & + (+3C^3S^2 - CS^4)A_{224} + (+C^4S)A_{233} + (+C^5 - 3C^3S^2)A_{234} \\
 & + (-2C^4S + 2C^2S^3)A_{244} + (-C^4S)A_{322} + (-C^3S^2 + CS^4)A_{323} \\
 & + (+3C^2S^3 - S^5)A_{324} + (+C^3S^2)A_{333} + (+C^4S - 3C^2S^3)A_{334} \\
 & + (-2C^3S^2 + 2CS^4)A_{344}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{233} = & (+CS^4)A_{222} + (+2C^3S^2)A_{223} \\
 & + (-4C^2S^3)A_{224} + (+C^5)A_{233} + (-4C^4S)A_{234} \\
 & + (+4C^3S^2)A_{244} + (+S^5)A_{322} + (+2C^2S^3)A_{323} \\
 & + (-4CS^4)A_{324} + (+C^4S)A_{333} + (-4C^3S^2)A_{334} \\
 & + (+4C^2S^3)A_{344}
 \end{aligned}$$

$$B_{311} = +(-S)A_{211} + (+C)A_{311}$$

$$\begin{aligned}
 B_{316} = & (-S^2)A_{215} + (-CS)A_{216} + (+CS)A_{315} \\
 & + (+C^2)A_{316}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{315} = & (-CS)A_{215} + (+S^2)A_{216} + (+C^2)A_{315} \\
 & + (-CS)A_{316}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{312} = & (-C^2S)A_{212} + (-S^3)A_{213} + (-2CS^2)A_{214} \\
 & + (+C^3)A_{312} + (+CS^2)A_{313} + (+2C^2S)A_{314}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{314} = & (+CS^2)A_{212} + (-CS^2)A_{213} + (-C^2S + S^3)A_{214} \\
 & + (-C^2S)A_{312} + (+C^2S)A_{313} + (+C^3 - CS^2)A_{314}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{313} = & (-S^3)A_{212} + (-C^2S)A_{213} + (+2CS^2)A_{214} \\
 & + (+CS^2)A_{312} + (+C^3)A_{313} + (-2C^2S)A_{314}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{366} = & (-S^3)A_{255} + (-2CS^2)A_{256} + (-C^2S)A_{266} \\
 & + (+CS^2)A_{355} + (+2C^2S)A_{356} + (+C^3)A_{366}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{356} = & (-CS^2)A_{255} + (-C^2S + S^3)A_{256} \\
 & + (+CS^2)A_{266} + (+C^2S)A_{355} + (+C^3 - CS^2)A_{356} \\
 & + (-C^2S)A_{366}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{326} = & (-C^2S^2)A_{225} + (-C^3S)A_{226} + (-S^4)A_{235} \\
 & + (-CS^3)A_{236} + (-2CS^3)A_{245} + (-2C^2S^2)A_{246}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (+C^3S)A_{325} + (+C^4)A_{326} + (+CS^3)A_{335} \\
 & + (+C^2S^2)A_{336} + (+2C^2S^2)A_{345} + (+2C^3S)A_{346}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{346} = & (+CS^3)A_{225} + (+C^2S^2)A_{226} + (-CS^3)A_{235} \\
 & + (-C^2S^2)A_{236} + (-C^2S^2 + S^4)A_{245} + (-C^3S + CS^3)A_{246}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (-C^2S^2)A_{325} + (-C^3S)A_{326} + (+C^2S^2)A_{335} \\
 & + (+C^3S)A_{336} + (+C^3S - CS^3)A_{345} + (+C^4 - C^2S^2)A_{346}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{336} = & (-S^4)A_{225} + (-CS^3)A_{226} + (-C^2S^2)A_{235} \\
 & + (-C^3S)A_{236} + (+2CS^3)A_{245} + (+2C^2S^2)A_{246}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (+CS^3)A_{325} + (+C^2S^2)A_{326} + (+C^3S)A_{335} \\
 & + (+C^4)A_{336} + (-2C^2S^2)A_{345} + (-2C^3S)A_{346}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{355} = & (-C^2S)A_{255} + (+2CS^2)A_{256} + (-S^3)A_{266} \\
 & + (+C^3)A_{355} + (-2C^2S)A_{356} + (+CS^2)A_{366}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{325} = & +(-C^3S)A_{225} + (+C^2S^2)A_{226} + (-CS^3)A_{235} \\
 & + (+S^4)A_{236} + (-2C^2S^2)A_{245} + (+2CS^3)A_{246}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (+C^4)A_{325} + (-C^3S)A_{326} + (+C^2S^2)A_{335} \\
 & + (-CS^3)A_{336} + (+2C^3S)A_{345} + (-2C^2S^2)A_{346}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{345} = & +(+C^2S^2)A_{225} + (-CS^3)A_{226} + (-C^2S^2)A_{235} \\
 & + (+CS^3)A_{236} + (-C^3S + CS^3)A_{245} + (+C^2S^2 - S^4)A_{246}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (-C^3S)A_{325} + (+C^2S^2)A_{326} + (+C^3S)A_{335} \\
 & + (-C^2S^2)A_{336} + (+C^4 - C^2S^2)A_{345} + (-C^3S + CS^3)A_{346}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{335} = & +(-CS^3)A_{225} + (+S^4)A_{226} + (-C^3S)A_{235} \\
 & + (+C^2S^2)A_{236} + (+2C^2S^2)A_{245} + (-2CS^3)A_{246}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (+C^2S^2)A_{325} + (-CS^3)A_{326} + (+C^4)A_{335} \\
 & + (-C^3S)A_{336} + (-2C^3S)A_{345} + (+2C^2S^2)A_{346}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{322} = & +(-C^4S)A_{222} + (-2C^2S^3)A_{223} \\
 & + (-4C^3S^2)A_{224} + (-S^5)A_{233} + (-4CS^4)A_{234}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (-4C^2S^3)A_{244} + (+C^5)A_{322} + (+2C^3S^2)A_{323} \\
 & + (+4C^4S)A_{324} + (+CS^4)A_{333} + (+4C^2S^3)A_{334}
 \end{aligned}$$

$$+ (+4C^3S^2)A_{344}$$

$$\begin{aligned}
 B_{324} = & +(+C^3S^2)A_{222} + (-C^3S^2 + CS^4)A_{223} \\
 & + (-C^4S + 3C^2S^3)A_{224} + (-CS^4)A_{233} + (-3C^2S^3 + S^5)A_{234}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (-2C^3S^2 + 2CS^4)A_{244} + (-C^4S)A_{322} + (+C^4S - C^2S^3)A_{323} \\
 & + (+C^5 - 3C^3S^2)A_{324} + (+C^2S^3)A_{333} + (+3C^3S^2 - CS^4)A_{334}
 \end{aligned}$$

$$+ (+2C^4S - 2C^2S^3)A_{344}$$

$$\begin{aligned}
 B_{323} = & +(-C^2S^3)A_{222} + (-C^4S - S^5)A_{223} \\
 & + (+2C^3S^2 - 2CS^4)A_{224} + (-C^2S^3)A_{233} + (-2C^3S^2 + 2CS^4)A_{234}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (+4C^2S^3)A_{244} + (+C^3S^2)A_{322} + (+C^5 + CS^4)A_{323} \\
 & + (-2C^4S + 2C^2S^3)A_{324} + (+C^3S^2)A_{333} + (+2C^4S - 2C^2S^3)A_{334}
 \end{aligned}$$

$$+ (-4C^3S^2)A_{344}$$

$$\begin{aligned}
 B_{344} = & +(-C^2S^3)A_{222} + (+2C^2S^3)A_{223} \\
 & + (+2C^3S^2 - 2CS^4)A_{224} + (-C^2S^3)A_{233} + (-2C^3S^2 + 2CS^4)A_{234}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (-C^4S + 2C^2S^3 - S^5)A_{244} + (+C^3S^2)A_{322} + (-2C^3S^2)A_{323} \\
 & + (-2C^4S + 2C^2S^3)A_{324} + (+C^3S^2)A_{333} + (+2C^4S - 2C^2S^3)A_{334}
 \end{aligned}$$

$$+ (+C^5 - 2C^3S^2 + CS^4)A_{344}$$

$$\begin{aligned}
 B_{334} = & +(+CS^4)A_{222} + (+C^3S^2 - CS^4)A_{223} \\
 & + (-3C^2S^3 + S^5)A_{224} + (-C^3S^2)A_{233} + (-C^4S + 3C^2S^3)A_{234}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (+2C^3S^2 - 2CS^4)A_{244} + (-C^2S^3)A_{322} + (-C^4S + C^2S^3)A_{323} \\
 & + (+3C^3S^2 - CS^4)A_{324} + (+C^4S)A_{333} + (+C^5 - 3C^3S^2)A_{334}
 \end{aligned}$$

$$+ (-2C^4S + 2C^2S^3)A_{344}$$

$$\begin{aligned}
 B_{333} = & +(-S^5)A_{222} + (-2C^2S^3)A_{223} + (+4CS^4)A_{224} \\
 & + (-C^4S)A_{233} + (+4C^3S^2)A_{234} + (-4C^2S^3)A_{244}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (+CS^4)A_{322} + (+2C^3S^2)A_{323} + (-4C^2S^3)A_{324} \\
 & + (+C^5)A_{333} + (-4C^4S)A_{334} + (+4C^3S^2)A_{344}
 \end{aligned}$$

ROTATION D'UN TENSEUR DE RANG 5 D'UN ANGLE Φ AUTOUR DE OY

LIRE, $S = \sin \Phi$, $C = \cos \Phi$, $C^2 = \cos^2 \Phi$, $S^3 = \sin^3 \Phi$, ETC

$$B_{111} = + (C^5) A_{111} + (2C^3S^2) A_{113} + (-4C^4S) A_{115} \\ + (CS^4) A_{133} + (-4C^2S^3) A_{135} + (4C^3S^2) A_{155} \\ + (-C^4S) A_{311} + (-2C^2S^3) A_{313} + (4C^3S^2) A_{315} \\ + (-S^5) A_{333} + (4CS^4) A_{335} + (-4C^2S^3) A_{355}$$

$$B_{116} = + (-C^3S) A_{114} + (C^4) A_{116} + (-CS^3) A_{134} \\ + (C^2S^2) A_{136} + (2C^2S^2) A_{145} + (-2C^3S) A_{156} \\ + (C^2S^2) A_{314} + (-C^3S) A_{316} + (S^4) A_{334} \\ + (-CS^3) A_{336} + (-2CS^3) A_{345} + (2C^2S^2) A_{356}$$

$$B_{115} = + (C^4S) A_{111} + (-C^4S + C^2S^3) A_{113} \\ + (C^5 - 3C^3S^2) A_{115} + (-C^2S^3) A_{133} + (3C^3S^2 - CS^4) A_{135} \\ + (-2C^4S + 2C^2S^3) A_{155} + (-C^3S^2) A_{311} + (C^3S^2 - CS^4) A_{313} \\ + (-C^4S + 3C^2S^3) A_{315} + (CS^4) A_{333} + (-3C^2S^3 + S^5) A_{335} \\ + (2C^3S^2 - 2CS^4) A_{355}$$

$$B_{112} = + (C^3) A_{112} + (CS^2) A_{123} + (-2C^2S) A_{125} \\ + (-C^2S) A_{312} + (-S^3) A_{323} + (2CS^2) A_{325}$$

$$B_{114} = + (C^4) A_{114} + (C^3S) A_{116} + (C^2S^2) A_{134} \\ + (CS^3) A_{136} + (-2C^3S) A_{145} + (-2C^2S^2) A_{156} \\ + (-C^3S) A_{314} + (-C^2S^2) A_{316} + (-CS^3) A_{334} \\ + (-S^4) A_{336} + (2C^2S^2) A_{345} + (2CS^3) A_{356}$$

$$B_{113} = + (C^3S^2) A_{111} + (C^3 + CS^4) A_{113} \\ + (2C^4S - 2C^2S^3) A_{115} + (C^3S^2) A_{133} + (-2C^4S + 2C^2S^3) A_{135} \\ + (-4C^3S^2) A_{155} + (-C^2S^3) A_{311} + (-C^4S - S^5) A_{313} \\ + (-2C^3S^2 + 2CS^4) A_{315} + (-C^2S^3) A_{333} + (2C^3S^2 - 2CS^4) A_{335} \\ + (4C^2S^3) A_{355}$$

$$B_{166} = + (CS^2) A_{144} + (-2C^2S) A_{146} + (C^3) A_{166} \\ + (-S^3) A_{344} + (2CS^2) A_{346} + (-C^2S) A_{366}$$

$$B_{156} = + (-C^2S^2) A_{114} + (C^3S) A_{116} + (C^2S^2) A_{134} \\ + (-C^3S) A_{136} + (-C^3S + CS^3) A_{145} + (C^4 - C^2S^2) A_{156} \\ + (CS^3) A_{314} + (-C^2S^2) A_{316} + (-CS^3) A_{334} \\ + (C^2S^2) A_{336} + (C^2S^2 - S^4) A_{345} + (-C^3S + CS^3) A_{356}$$

$$B_{126} = + (-CS) A_{124} + (C^2) A_{126} + (S^2) A_{324} \\ + (-CS) A_{326}$$

$$B_{146} = + (-C^2S) A_{144} + (C^3 - CS^2) A_{146} \\ + (C^2S) A_{166} + (CS^2) A_{344} + (-C^2S + S^3) A_{346} \\ + (-CS^2) A_{366}$$

$$B_{136} = + (-CS^3) A_{114} + (C^2S^2) A_{116} + (-C^3S) A_{134} \\ + (C^4) A_{136} + (-2C^2S^2) A_{145} + (2C^3S) A_{156} \\ + (S^4) A_{314} + (-CS^3) A_{316} + (C^2S^2) A_{334} \\ + (-C^3S) A_{336} + (2CS^3) A_{345} + (-2C^2S^2) A_{356}$$

$$B_{155} = + (C^3S^2) A_{111} + (-2C^3S^2) A_{113} \\ + (2C^4S - 2C^2S^3) A_{115} + (C^3S^2) A_{133} + (-2C^4S + 2C^2S^3) A_{135} \\ + (C^5 - 2C^3S^2 + CS^4) A_{155} + (-C^2S^3) A_{311} + (2C^2S^3) A_{313} \\ + (-2C^3S^2 + 2CS^4) A_{315} + (-C^2S^3) A_{333} + (2C^3S^2 - 2CS^4) A_{335} \\ + (-C^4S + 2C^2S^3 - S^5) A_{355}$$

$$B_{125} = + (C^2S) A_{112} + (-C^2S) A_{123} + (C^3 - CS^2) A_{125} \\ + (-CS^2) A_{312} + (CS^2) A_{323} + (-C^2S + S^3) A_{325}$$

$$B_{145} = + (C^3S) A_{114} + (C^2S^2) A_{116} + (-C^3S) A_{134} \\ + (-C^2S^2) A_{136} + (C^4 - C^2S^2) A_{145} + (C^3S - CS^3) A_{156} \\ + (-C^2S^2) A_{314} + (-CS^3) A_{316} + (C^2S^2) A_{334} \\ + (CS^3) A_{336} + (-C^3S + CS^3) A_{345} + (-C^2S^2 + S^4) A_{356}$$

$$B_{135} = + (C^2S^3) A_{111} + (C^4S - C^2S^3) A_{113} \\ + (3C^3S^2 - CS^4) A_{115} + (-C^4S) A_{133} + (C^5 - 3C^3S^2) A_{135} \\ + (2C^4S - 2C^2S^3) A_{155} + (-CS^4) A_{311} + (-C^3S^2 + CS^4) A_{313} \\ + (-3C^2S^3 + S^5) A_{315} + (C^3S^2) A_{333} + (-C^4S + 3C^2S^3) A_{335} \\ + (-2C^3S^2 + 2CS^4) A_{355}$$

$$B_{122} = + (C) A_{122} + (-S) A_{322}$$

$$B_{124} = + (C^2) A_{124} + (CS) A_{126} + (-CS) A_{324} \\ + (-S^2) A_{326}$$

$$B_{123} = + (CS^2) A_{112} + (C^3) A_{123} + (2C^2S) A_{125} \\ + (-S^3) A_{312} + (-C^2S^2) A_{323} + (-2CS^2) A_{325}$$

$$B_{144} = + (C^3) A_{144} + (2C^2S) A_{146} + (CS^2) A_{166} \\ + (-C^2S) A_{344} + (-2CS^2) A_{346} + (-S^3) A_{366}$$

$$B_{134} = + (C^2S^2) A_{114} + (CS^3) A_{116} + (C^4) A_{134} \\ + (C^3S) A_{136} + (2C^3S) A_{145} + (2C^2S^2) A_{156} \\ + (-CS^3) A_{314} + (-S^4) A_{316} + (-C^3S) A_{334} \\ + (-C^2S^2) A_{336} + (-2C^2S^2) A_{345} + (-2CS^3) A_{356}$$

$$B_{133} = + (CS^4) A_{111} + (2C^3S^2) A_{113} \\ + (4C^2S^3) A_{115} + (C^5) A_{133} + (4C^4S) A_{135} \\ + (4C^3S^2) A_{155} + (-S^5) A_{311} + (-2C^2S^3) A_{313} \\ + (-4CS^4) A_{315} + (-C^4S) A_{333} + (-4C^3S^2) A_{335} \\ + (-4C^2S^3) A_{355}$$

$$B_{211} = + (C^4) A_{211} + (2C^2S^2) A_{213} + (-4C^3S) A_{215} \\ + (S^4) A_{233} + (-4CS^3) A_{235} + (4C^2S^2) A_{255}$$

$$B_{216} = + (-C^2S) A_{214} + (C^3) A_{216} + (-S^3) A_{234} \\ + (CS^2) A_{236} + (2CS^2) A_{245} + (-2C^2S) A_{256}$$

$$B_{215} = + (C^3S) A_{211} + (-C^3S + CS^3) A_{213} \\ + (C^4 - 3C^2S^2) A_{215} + (-CS^3) A_{233} + (3C^2S^2 - S^4) A_{235} \\ + (-2C^3S + 2CS^3) A_{255}$$

$$B_{212} = + (C^2) A_{212} + (S^2) A_{223} + (-2CS) A_{225}$$

$$B_{214} = + (C^3) A_{214} + (C^2S) A_{216} + (CS^2) A_{234} \\ + (S^3) A_{236} + (-2C^2S) A_{245} + (-2CS^2) A_{256}$$

$$B_{213} = + (C^2S^2) A_{211} + (C^4 + S^4) A_{213} \\ + (2C^3S - 2CS^3) A_{215} + (C^2S^2) A_{233} + (-2C^3S + 2CS^3) A_{235} \\ + (-4C^2S^2) A_{255}$$

$$B_{266} = + (S^2) A_{244} + (-2CS) A_{246} + (C^2) A_{266}$$

$$B_{256} = + (-CS^2) A_{214} + (C^2S) A_{216} + (CS^2) A_{234} \\ + (-C^2S) A_{236} + (-C^2S + S^3) A_{245} + (C^3 - CS^2) A_{256}$$

$$B_{226} = + (-S) A_{224} + (C) A_{226}$$

$$B_{246} = +(-CS)A_{244} + (+C^2 - S^2)A_{246} + (+CS)A_{266}$$

$$B_{236} = +(-S^3)A_{214} + (+CS^2)A_{216} + (-C^2S)A_{234}$$

$$+ (+C^3)A_{236} + (-2CS^2)A_{245} + (+2C^2S)A_{256}$$

$$B_{255} = +(+C^2S^2)A_{211} + (-2C^2S^2)A_{213}$$

$$+ (+2C^3S - 2CS^3)A_{215} + (+C^2S^2)A_{233} + (-2C^3S + 2CS^3)A_{235}$$

$$+ (+C^4 - 2C^2S^2 + S^4)A_{255}$$

$$B_{225} = +(+CS)A_{212} + (-CS)A_{223} + (+C^2 - S^2)A_{225}$$

$$B_{245} = +(+C^2S)A_{214} + (+CS^2)A_{216} + (-C^2S)A_{234}$$

$$+ (-CS^2)A_{236} + (+C^3 - CS^2)A_{245} + (+C^2S - S^3)A_{256}$$

$$B_{235} = +(+CS^3)A_{211} + (+C^3S - CS^3)A_{213}$$

$$+ (+3C^2S^2 - S^4)A_{215} + (-C^3S)A_{233} + (+C^4 - 3C^2S^2)A_{235}$$

$$+ (+2C^3S - 2CS^3)A_{255}$$

$$B_{222} = +A_{222}$$

$$B_{224} = +(+C)A_{224} + (+S)A_{226}$$

$$B_{223} = +(+S^2)A_{212} + (+C^2)A_{223} + (+2CS)A_{225}$$

$$B_{244} = +(+C^2)A_{244} + (+2CS)A_{246} + (+S^2)A_{266}$$

$$B_{234} = +(+CS^2)A_{214} + (+S^3)A_{216} + (+C^3)A_{234}$$

$$+ (+C^2S)A_{236} + (+2C^2S)A_{245} + (+2CS^2)A_{256}$$

$$B_{233} = +(+S^4)A_{211} + (+2C^2S^2)A_{213} + (+4CS^3)A_{215}$$

$$+ (+C^4)A_{233} + (+4C^3S)A_{235} + (+4C^2S^2)A_{255}$$

$$B_{311} = +(+C^4S)A_{111} + (+2C^2S^3)A_{113}$$

$$+ (-4C^3S^2)A_{115} + (+S^5)A_{133} + (-4CS^4)A_{135}$$

$$+ (+4C^2S^3)A_{155} + (+C^5)A_{311} + (+2C^3S^2)A_{313}$$

$$+ (-4C^4S)A_{315} + (+CS^4)A_{333} + (-4C^2S^3)A_{335}$$

$$+ (+4C^3S^2)A_{355}$$

$$B_{316} = +(-C^2S^2)A_{114} + (+C^3S)A_{116} + (-S^4)A_{134}$$

$$+ (+CS^3)A_{136} + (+2CS^3)A_{145} + (-2C^2S^2)A_{156}$$

$$+ (-C^3S)A_{314} + (+C^4)A_{316} + (-CS^3)A_{334}$$

$$+ (+C^2S^2)A_{336} + (+2C^2S^2)A_{345} + (-2C^3S)A_{356}$$

$$B_{315} = +(+C^3S^2)A_{111} + (-C^3S^2 + CS^4)A_{113}$$

$$+ (+C^4S - 3C^2S^3)A_{115} + (-CS^4)A_{133} + (+3C^2S^3 - S^5)A_{135}$$

$$+ (-2C^3S^2 + 2CS^4)A_{155} + (+C^4S)A_{311} + (-C^4S + C^2S^3)A_{313}$$

$$+ (+C^5 - 3C^3S^2)A_{315} + (-C^2S^3)A_{333} + (+3C^3S^2 - CS^4)A_{335}$$

$$+ (-2C^4S + 2C^2S^3)A_{355}$$

$$B_{312} = +(+C^2S)A_{112} + (+S^3)A_{123} + (-2CS^2)A_{125}$$

$$+ (+C^3)A_{312} + (+CS^2)A_{323} + (-2C^2S)A_{325}$$

$$B_{314} = +(+C^3S)A_{114} + (+C^2S^2)A_{116} + (+CS^3)A_{134}$$

$$+ (+S^4)A_{136} + (-2C^2S^2)A_{145} + (-2CS^3)A_{156}$$

$$+ (+C^4)A_{314} + (+C^3S)A_{316} + (+C^2S^2)A_{334}$$

$$+ (+CS^3)A_{336} + (-2C^3S)A_{345} + (-2C^2S^2)A_{356}$$

$$B_{313} = +(+C^2S^3)A_{111} + (+C^4S + S^5)A_{113}$$

$$+ (+2C^3S^2 - 2CS^4)A_{115} + (+C^2S^3)A_{133} + (-2C^3S^2 + 2CS^4)A_{135}$$

$$+ (-4C^2S^3)A_{155} + (+C^3S^2)A_{311} + (+C^5 + CS^4)A_{313}$$

$$+ (+2C^4S - 2C^2S^3)A_{315} + (+C^3S^2)A_{333} + (-2C^4S + 2C^2S^3)A_{335}$$

$$+ (-4C^3S^2)A_{355}$$

$$B_{366} = +(+S^3)A_{144} + (-2CS^2)A_{146} + (+C^2S)A_{166}$$

$$+ (+CS^2)A_{344} + (-2C^2S)A_{346} + (+C^3)A_{366}$$

$$B_{356} = +(-CS^3)A_{114} + (+C^2S^2)A_{116} + (+CS^3)A_{134}$$

$$+ (-C^2S^2)A_{136} + (-C^2S^2 + S^4)A_{145} + (+C^3S - CS^3)A_{156}$$

$$+ (-C^2S^2)A_{314} + (+C^3S)A_{316} + (+C^2S^2)A_{334}$$

$$+ (-C^3S)A_{336} + (-C^3S + CS^3)A_{345} + (+C^4 - C^2S^2)A_{356}$$

$$B_{326} = +(-S^2)A_{124} + (+CS)A_{126} + (-CS)A_{324}$$

$$+ (+C^2)A_{326}$$

$$B_{346} = +(-CS^2)A_{144} + (+C^2S - S^3)A_{146}$$

$$+ (+CS^2)A_{166} + (-C^2S)A_{344} + (+C^3 - CS^2)A_{346}$$

$$+ (+C^2S)A_{366}$$

$$B_{336} = +(-S^4)A_{114} + (+CS^3)A_{116} + (-C^2S^2)A_{134}$$

$$+ (+C^3S)A_{136} + (-2CS^3)A_{145} + (+2C^2S^2)A_{156}$$

$$+ (-CS^3)A_{314} + (+C^2S^2)A_{316} + (-C^3S)A_{334}$$

$$+ (+C^4)A_{336} + (-2C^2S^2)A_{345} + (+2C^3S)A_{356}$$

$$B_{355} = +(+C^2S^3)A_{111} + (-2C^2S^3)A_{113}$$

$$+ (+2C^3S^2 - 2CS^4)A_{115} + (+C^2S^3)A_{133} + (-2C^3S^2 + 2CS^4)A_{135}$$

$$+ (+C^4S - 2C^2S^3 + S^5)A_{155} + (+C^3S^2)A_{311} + (-2C^3S^2)A_{313}$$

$$+ (+2C^4S - 2C^2S^3)A_{315} + (+C^3S^2)A_{333} + (-2C^4S + 2C^2S^3)A_{335}$$

$$+ (+C^5 - 2C^3S^2 + CS^4)A_{355}$$

$$B_{325} = +(+CS^2)A_{112} + (-CS^2)A_{123} + (+C^2S - S^3)A_{125}$$

$$+ (+C^2S)A_{312} + (-C^2S)A_{323} + (+C^3 - CS^2)A_{325}$$

$$B_{345} = +(+C^2S^2)A_{114} + (+CS^3)A_{116} + (-C^2S^2)A_{134}$$

$$+ (-CS^3)A_{136} + (+C^3S - CS^3)A_{145} + (+C^2S^2 - S^4)A_{156}$$

$$+ (+C^3S)A_{314} + (+C^2S^2)A_{316} + (-C^3S)A_{334}$$

$$+ (-C^2S^2)A_{336} + (+C^4 - C^2S^2)A_{345} + (+C^3S - CS^3)A_{356}$$

$$B_{335} = +(+CS^4)A_{111} + (+C^3S^2 - CS^4)A_{113}$$

$$+ (+3C^2S^3 - S^5)A_{115} + (-C^3S^2)A_{133} + (+C^4S - 3C^2S^3)A_{135}$$

$$+ (+2C^3S^2 - 2CS^4)A_{155} + (+C^2S^3)A_{311} + (+C^4S - C^2S^3)A_{313}$$

$$+ (+3C^3S^2 - CS^4)A_{315} + (-C^4S)A_{333} + (+C^5 - 3C^3S^2)A_{335}$$

$$+ (+2C^4S - 2C^2S^3)A_{355}$$

$$B_{322} = +(+S)A_{122} + (+C)A_{322}$$

$$B_{324} = +(+CS)A_{124} + (+S^2)A_{126} + (+C^2)A_{324}$$

$$+ (+CS)A_{326}$$

$$B_{323} = +(+S^3)A_{112} + (+C^2S)A_{123} + (+2CS^2)A_{125}$$

$$+ (+CS^2)A_{312} + (+C^3)A_{323} + (+2C^2S)A_{325}$$

$$B_{344} = +(+C^2S)A_{144} + (+2CS^2)A_{146} + (+S^3)A_{166}$$

$$+ (+C^3)A_{344} + (+2C^2S)A_{346} + (+CS^2)A_{366}$$

$$B_{334} = +(+CS^3)A_{114} + (+S^4)A_{116} + (+C^3S)A_{134}$$

$$+ (+C^2S^2)A_{136} + (+2C^2S^2)A_{145} + (+2CS^3)A_{156}$$

$$+ (+C^2S^2)A_{314} + (+CS^3)A_{316} + (+C^4)A_{334}$$

$$+ (+C^3S)A_{336} + (+2C^3S)A_{345} + (+2C^2S^2)A_{356}$$

$$B_{333} = +(+S^5)A_{111} + (+2C^2S^3)A_{113} + (+4CS^4)A_{115}$$

$$+ (+C^4S)A_{133} + (+4C^3S^2)A_{135} + (+4C^2S^3)A_{155}$$

$$+ (+CS^4)A_{311} + (+2C^3S^2)A_{313} + (+4C^2S^3)A_{315}$$

$$+ (+C^5)A_{333} + (+4C^4S)A_{335} + (+4C^3S^2)A_{355}$$

ROTATION D'UN TENSEUR DE RANG 5 D'UN ANGLE ϕ AUTOUR DE OZ

 LIRE, $S = \sin \phi$, $C = \cos \phi$, $C^2 = \cos^2 \phi$, $S^3 = \sin^3 \phi$, ETC

$$\begin{aligned} B_{111} = & (+C^5)A_{111} + (+2C^3S^2)A_{112} + (+4C^4S)A_{116} \\ & + (+CS^4)A_{122} + (+4C^2S^3)A_{126} + (+4C^3S^2)A_{166} \\ & + (+C^4S)A_{211} + (+2C^2S^3)A_{212} + (+4C^3S^2)A_{216} \\ & + (+S^5)A_{222} + (+4CS^4)A_{226} + (+4C^2S^3)A_{266} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{116} = & (-C^4S)A_{111} + (-C^4S - C^2S^3)A_{112} \\ & + (+C^5 - 3C^3S^2)A_{116} + (+C^2S^3)A_{122} + (+3C^3S^2 - CS^4)A_{126} \\ & + (+2C^4S - 2C^2S^3)A_{166} + (-C^3S^2)A_{211} + (+C^3S^2 - CS^4)A_{212} \\ & + (+C^4S - 3C^2S^3)A_{216} + (+CS^4)A_{222} + (+3C^2S^3 - S^5)A_{226} \\ & + (+2C^3S^2 - 2CS^4)A_{266} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{115} = & (+C^3S)A_{114} + (+C^4)A_{115} + (+CS^3)A_{124} \\ & + (+C^2S^2)A_{125} + (+2C^2S^2)A_{146} + (+2C^3S)A_{156} \\ & + (+C^2S^2)A_{214} + (+C^3S)A_{215} + (+S^4)A_{224} \\ & + (+CS^3)A_{225} + (+2CS^3)A_{246} + (+2C^2S^2)A_{256} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{112} = & (+C^3S^2)A_{111} + (+C^5 + CS^4)A_{112} \\ & + (-2C^4S + 2C^2S^3)A_{116} + (+C^3S^2)A_{122} + (+2C^4S - 2C^2S^3)A_{126} \\ & + (-4C^3S^2)A_{166} + (+C^2S^3)A_{211} + (+C^4S + S^5)A_{212} \\ & + (-2C^3S^2 + 2CS^4)A_{216} + (+C^2S^3)A_{222} + (+2C^3S^2 - 2CS^4)A_{226} \\ & + (-4C^2S^3)A_{266} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{114} = & (+C^4)A_{114} + (-C^3S)A_{115} + (+C^2S^2)A_{124} \\ & + (-CS^3)A_{125} + (+2C^3S)A_{146} + (-2C^2S^2)A_{156} \\ & + (+C^3S)A_{214} + (-C^2S^2)A_{215} + (+CS^3)A_{224} \\ & + (-S^4)A_{225} + (+2C^2S^2)A_{246} + (-2CS^3)A_{256} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{113} = & (+C^3)A_{113} + (+CS^2)A_{123} + (+2C^2S)A_{136} \\ & + (+C^2S)A_{213} + (+S^3)A_{223} + (+2CS^2)A_{236} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{166} = & (+C^3S^2)A_{111} + (-2C^3S^2)A_{112} \\ & + (-2C^4S + 2C^2S^3)A_{116} + (+C^3S^2)A_{122} + (+2C^4S - 2C^2S^3)A_{126} \\ & + (+C^5 - 2C^3S^2 + CS^4)A_{166} + (+C^2S^3)A_{211} + (-2C^2S^3)A_{212} \\ & + (-2C^3S^2 + 2CS^4)A_{216} + (+C^2S^3)A_{222} + (+2C^3S^2 - 2CS^4)A_{226} \\ & + (+C^4S - 2C^2S^3 + S^5)A_{266} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{156} = & (-C^2S^2)A_{114} + (-C^3S)A_{115} + (+C^2S^2)A_{124} \\ & + (+C^3S)A_{125} + (+C^3S - CS^3)A_{146} + (+C^4 - C^2S^2)A_{156} \\ & + (-CS^3)A_{214} + (-C^2S^2)A_{215} + (+CS^3)A_{224} \\ & + (+C^2S^2)A_{225} + (+C^2S^2 - S^4)A_{246} + (+C^3S - CS^3)A_{256} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{126} = & (-C^2S^3)A_{111} + (-C^4S + C^2S^3)A_{112} \\ & + (+3C^3S^2 - CS^4)A_{116} + (+C^4S)A_{122} + (+C^5 - 3C^3S^2)A_{126} \\ & + (-2C^4S + 2C^2S^3)A_{166} + (-CS^4)A_{211} + (-C^3S^2 + CS^4)A_{212} \\ & + (+3C^2S^3 - S^5)A_{216} + (+C^3S^2)A_{222} + (+C^4S - 3C^2S^3)A_{226} \\ & + (-2C^3S^2 + 2CS^4)A_{266} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{146} = & (-C^3S)A_{114} + (+C^2S^2)A_{115} + (+C^3S)A_{124} \\ & + (-C^2S^2)A_{125} + (+C^4 - C^2S^2)A_{146} + (-C^3S + CS^3)A_{156} \\ & + (-C^2S^2)A_{214} + (+CS^3)A_{215} + (+C^2S^2)A_{224} \\ & + (-CS^3)A_{225} + (+C^3S - CS^3)A_{246} + (-C^2S^2 + S^4)A_{256} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{136} = & (-C^2S)A_{113} + (+C^2S)A_{123} + (+C^3 - CS^2)A_{136} \\ & + (-CS^2)A_{213} + (+CS^2)A_{223} + (+C^2S - S^3)A_{236} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{155} = & (+CS^2)A_{144} + (+2C^2S)A_{145} + (+C^3)A_{155} \\ & + (+S^3)A_{244} + (+2CS^2)A_{245} + (+C^2S)A_{255} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{125} = & (+CS^3)A_{114} + (+C^2S^2)A_{115} + (+C^3S)A_{124} \\ & + (+C^4)A_{125} + (-2C^2S^2)A_{146} + (-2C^3S)A_{156} \\ & + (+S^4)A_{214} + (+CS^3)A_{215} + (+C^2S^2)A_{224} \\ & + (+C^3S)A_{225} + (-2CS^3)A_{246} + (-2C^2S^2)A_{256} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{145} = & (+C^2S)A_{144} + (+C^3 - CS^2)A_{145} \\ & + (-C^2S)A_{155} + (+CS^2)A_{244} + (+C^2S - S^3)A_{245} \\ & + (-CS^2)A_{255} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{135} = & (+CS)A_{134} + (+C^2)A_{135} + (+S^2)A_{234} \\ & + (+CS)A_{235} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{122} = & (+CS^4)A_{111} + (+2C^3S^2)A_{112} \\ & + (-4C^2S^3)A_{116} + (+C^5)A_{122} + (-4C^4S)A_{126} \\ & + (+4C^3S^2)A_{166} + (+S^5)A_{211} + (+2C^2S^3)A_{212} \\ & + (-4CS^4)A_{216} + (+C^4S)A_{222} + (-4C^3S^2)A_{226} \\ & + (+4C^2S^3)A_{266} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{124} = & (+C^2S^2)A_{114} + (-CS^3)A_{115} + (+C^4)A_{124} \\ & + (-C^3S)A_{125} + (-2C^3S)A_{146} + (+2C^2S^2)A_{156} \\ & + (+CS^3)A_{214} + (-S^4)A_{215} + (+C^3S)A_{224} \\ & + (-C^2S^2)A_{225} + (-2C^2S^2)A_{246} + (+2CS^3)A_{256} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{123} = & (+CS^2)A_{113} + (+C^3)A_{123} + (-2C^2S)A_{136} \\ & + (+S^3)A_{213} + (+C^2S)A_{223} + (-2CS^2)A_{236} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{144} = & (+C^3)A_{144} + (-2C^2S)A_{145} + (+CS^2)A_{155} \\ & + (+C^2S)A_{244} + (-2CS^2)A_{245} + (+S^3)A_{255} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{134} = & (+C^2)A_{134} + (-CS)A_{135} + (+CS)A_{234} \\ & + (-S^2)A_{235} \end{aligned}$$

$$B_{133} = (+C)A_{133} + (+S)A_{233}$$

$$\begin{aligned} B_{211} = & (-C^4S)A_{111} + (-2C^2S^3)A_{112} \\ & + (-4C^3S^2)A_{116} + (-S^5)A_{122} + (-4CS^4)A_{126} \\ & + (-4C^2S^3)A_{166} + (+C^5)A_{211} + (+2C^2S^2)A_{212} \\ & + (+4C^4S)A_{216} + (+CS^4)A_{222} + (+4C^2S^3)A_{226} \\ & + (+4C^3S^2)A_{266} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{216} = & (+C^3S^2)A_{111} + (-C^3S^2 + CS^4)A_{112} \\ & + (-C^4S + 3C^2S^3)A_{116} + (-CS^4)A_{122} + (-3C^2S^3 + S^5)A_{126} \\ & + (-2C^3S^2 + 2CS^4)A_{166} + (-C^4S)A_{211} + (+C^4S - C^2S^3)A_{212} \\ & + (+C^5 - 3C^3S^2)A_{216} + (+C^2S^3)A_{222} + (+3C^3S^2 - CS^4)A_{226} \\ & + (+2C^4S - 2C^2S^3)A_{266} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{215} = & (-C^2S^2)A_{114} + (-C^3S)A_{115} + (-S^4)A_{124} \\ & + (-CS^3)A_{125} + (-2CS^3)A_{146} + (-2C^2S^2)A_{156} \\ & + (+C^3S)A_{214} + (+C^4)A_{215} + (+CS^3)A_{224} \\ & + (+C^2S^2)A_{225} + (+2C^2S^2)A_{246} + (+2C^3S)A_{256} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{212} = & (-C^3S^2)A_{111} + (-C^4S - S^5)A_{112} \\ & + (+2C^3S^2 - 2CS^4)A_{116} + (-C^3S^2)A_{122} + (-2C^3S^2 + 2CS^4)A_{126} \\ & + (+4C^2S^3)A_{166} + (+C^3S^2)A_{211} + (+C^5 + CS^4)A_{212} \\ & + (-2C^4S + 2C^2S^3)A_{216} + (+C^3S^2)A_{222} + (+2C^4S - 2C^2S^3)A_{226} \\ & + (-4C^3S^2)A_{266} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{214} &= +(-C^3S)A_{114} + (+C^2S^2)A_{115} + (-CS^3)A_{124} \\
&+ (+S^4)A_{125} + (-2C^2S^2)A_{146} + (+2CS^3)A_{156} \\
&+ (+C^4)A_{214} + (-C^3S)A_{215} + (+C^2S^2)A_{224} \\
&+ (-CS^3)A_{225} + (+2C^3S)A_{246} + (-2C^2S^2)A_{256} \\
B_{213} &= +(-C^2S)A_{113} + (-S^3)A_{123} + (-2CS^2)A_{136} \\
&+ (+C^3)A_{213} + (+CS^2)A_{223} + (+2C^2S)A_{236} \\
B_{266} &= +(-C^2S^3)A_{111} + (+2C^2S^3)A_{112} \\
&+ (+2C^3S^2 - 2CS^4)A_{116} + (-C^2S^3)A_{122} + (-2C^3S^2 + 2CS^4)A_{126} \\
&+ (-C^4S + 2C^2S^3 - S^5)A_{166} + (+C^3S^2)A_{211} + (-2C^3S^2)A_{212} \\
&+ (-2C^4S + 2C^2S^3)A_{216} + (+C^3S^2)A_{222} + (+2C^4S - 2C^2S^3)A_{226} \\
&+ (+C^5 - 2C^3S^2 + CS^4)A_{266} \\
B_{256} &= +(+CS^3)A_{114} + (+C^2S^2)A_{115} + (-CS^3)A_{124} \\
&+ (-C^2S^2)A_{125} + (-C^2S^2 + S^4)A_{146} + (-C^3S + CS^3)A_{156} \\
&+ (-C^2S^2)A_{214} + (-C^3S)A_{215} + (+C^2S^2)A_{224} \\
&+ (+C^3S)A_{225} + (+C^3S - CS^3)A_{246} + (+C^4 - C^2S^2)A_{256} \\
B_{226} &= +(+CS^4)A_{111} + (+C^3S^2 - CS^4)A_{112} \\
&+ (-3C^2S^3 + S^5)A_{116} + (-C^3S^2)A_{122} + (-C^4S + 3C^2S^3)A_{126} \\
&+ (+2C^3S^2 - 2CS^4)A_{166} + (-C^2S^3)A_{211} + (-C^4S + C^2S^3)A_{212} \\
&+ (+3C^3S^2 - CS^4)A_{216} + (+C^4S)A_{222} + (+C^5 - 3C^3S^2)A_{226} \\
&+ (-2C^4S + 2C^2S^3)A_{266} \\
B_{246} &= +(+C^2S^2)A_{114} + (-CS^3)A_{115} + (-C^2S^2)A_{124} \\
&+ (+CS^3)A_{125} + (-C^3S + CS^3)A_{146} + (+C^2S^2 - S^4)A_{156} \\
&+ (-C^3S)A_{214} + (+C^2S^2)A_{215} + (+C^3S)A_{224} \\
&+ (-C^2S^2)A_{225} + (+C^4 - C^2S^2)A_{246} + (-C^3S + CS^3)A_{256} \\
B_{236} &= +(+CS^2)A_{113} + (-CS^2)A_{123} + (-C^2S + S^3)A_{136} \\
&+ (-C^2S)A_{213} + (+C^2S)A_{223} + (+C^3 - CS^2)A_{236} \\
B_{255} &= +(-S^3)A_{144} + (-2CS^2)A_{145} + (-C^2S)A_{155} \\
&+ (+CS^2)A_{244} + (+2C^2S)A_{245} + (+C^3)A_{255} \\
B_{225} &= +(-S^4)A_{114} + (-CS^3)A_{115} + (-C^2S^2)A_{124} \\
&+ (-C^3S)A_{125} + (+2CS^3)A_{146} + (+2C^2S^2)A_{156} \\
&+ (+CS^3)A_{214} + (+C^2S^2)A_{215} + (+C^3S)A_{224} \\
&+ (+C^4)A_{225} + (-2C^2S^2)A_{246} + (-2C^3S)A_{256} \\
B_{245} &= +(-CS^2)A_{144} + (-C^2S + S^3)A_{145} \\
&+ (+CS^2)A_{155} + (+C^2S)A_{244} + (+C^3 - CS^2)A_{245} \\
&+ (-C^2S)A_{255} \\
B_{235} &= +(-S^2)A_{134} + (-CS)A_{135} + (+CS)A_{234} \\
&+ (+C^2)A_{235} \\
B_{222} &= +(-S^5)A_{111} + (-2C^2S^3)A_{112} + (+4CS^4)A_{116} \\
&+ (-C^4S)A_{122} + (+4C^3S^2)A_{126} + (-4C^2S^3)A_{166} \\
&+ (+CS^4)A_{211} + (+2C^3S^2)A_{212} + (-4C^2S^3)A_{216} \\
&+ (+C^5)A_{222} + (-4C^4S)A_{226} + (+4C^3S^2)A_{266} \\
B_{224} &= +(-CS^3)A_{114} + (+S^4)A_{115} + (-C^3S)A_{124} \\
&+ (+C^2S^2)A_{125} + (+2C^2S^2)A_{146} + (-2CS^3)A_{156} \\
&+ (+C^2S^2)A_{214} + (-CS^3)A_{215} + (+C^4)A_{224} \\
&+ (-C^3S)A_{225} + (-2C^3S)A_{246} + (+2C^2S^2)A_{256} \\
B_{223} &= +(-S^3)A_{113} + (-C^2S)A_{123} + (+2CS^2)A_{136} \\
&+ (+CS^2)A_{213} + (+C^3)A_{223} + (-2C^2S)A_{236} \\
B_{244} &= +(-C^2S)A_{144} + (+2CS^2)A_{145} + (-S^3)A_{155} \\
&+ (+C^3)A_{244} + (-2C^2S)A_{245} + (+CS^2)A_{255} \\
B_{234} &= +(-CS)A_{134} + (+S^2)A_{135} + (+C^2)A_{234} \\
&+ (-CS)A_{235}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{233} &= +(-S)A_{133} + (+C)A_{233} \\
B_{311} &= +(+C^4)A_{311} + (+2C^2S^2)A_{312} + (+4C^3S)A_{316} \\
&+ (+S^4)A_{322} + (+4CS^3)A_{326} + (+4C^2S^2)A_{366} \\
B_{316} &= +(-C^3S)A_{311} + (+C^3S - CS^3)A_{312} \\
&+ (+C^4 - 3C^2S^2)A_{316} + (+CS^3)A_{322} + (+3C^2S^2 - S^4)A_{326} \\
&+ (+2C^3S - 2CS^3)A_{366} \\
B_{315} &= +(+C^2S)A_{314} + (+C^3)A_{315} + (+S^3)A_{324} \\
&+ (+CS^2)A_{325} + (+2CS^2)A_{346} + (+2C^2S)A_{356} \\
B_{312} &= +(+C^2S^2)A_{311} + (+C^4 + S^4)A_{312} \\
&+ (-2C^3S + 2CS^3)A_{316} + (+C^2S^2)A_{322} + (+2C^3S - 2CS^3)A_{326} \\
&+ (-4C^2S^2)A_{366} \\
B_{314} &= +(+C^3)A_{314} + (-C^2S)A_{315} + (+CS^2)A_{324} \\
&+ (-S^3)A_{325} + (+2C^2S)A_{346} + (-2CS^2)A_{356} \\
B_{313} &= +(+C^2)A_{313} + (+S^2)A_{323} + (+2CS)A_{336} \\
B_{366} &= +(+C^2S^2)A_{311} + (-2C^2S^2)A_{312} \\
&+ (-2C^3S + 2CS^3)A_{316} + (+C^2S^2)A_{322} + (+2C^3S - 2CS^3)A_{326} \\
&+ (+C^4 - 2C^2S^2 + S^4)A_{366} \\
B_{356} &= +(-CS^2)A_{314} + (-C^2S)A_{315} + (+CS^2)A_{324} \\
&+ (+C^2S)A_{325} + (+C^2S - S^3)A_{346} + (+C^3 - CS^2)A_{356} \\
B_{326} &= +(-CS^3)A_{311} + (-C^3S + CS^3)A_{312} \\
&+ (+3C^2S^2 - S^4)A_{316} + (+C^3S)A_{322} + (+C^4 - 3C^2S^2)A_{326} \\
&+ (-2C^3S + 2CS^3)A_{366} \\
B_{346} &= +(-C^2S)A_{314} + (+CS^2)A_{315} + (+C^2S)A_{324} \\
&+ (-CS^2)A_{325} + (+C^3 - CS^2)A_{346} + (-C^2S + S^3)A_{356} \\
B_{336} &= +(-CS)A_{313} + (+CS)A_{323} + (+C^2 - S^2)A_{336} \\
B_{355} &= +(+S^2)A_{344} + (+2CS)A_{345} + (+C^2)A_{355} \\
B_{325} &= +(+S^3)A_{314} + (+CS^2)A_{315} + (+C^2S)A_{324} \\
&+ (+C^3)A_{325} + (-2CS^2)A_{346} + (-2C^2S)A_{356} \\
B_{345} &= +(+CS)A_{344} + (+C^2 - S^2)A_{345} + (-CS)A_{355} \\
B_{335} &= +(+S)A_{334} + (+C)A_{335} \\
B_{322} &= +(+S^4)A_{311} + (+2C^2S^2)A_{312} + (-4CS^3)A_{316} \\
&+ (+C^4)A_{322} + (-4C^3S)A_{326} + (+4C^2S^2)A_{366} \\
B_{324} &= +(+CS^2)A_{314} + (-S^3)A_{315} + (+C^3)A_{324} \\
&+ (-C^2S)A_{325} + (-2C^2S)A_{346} + (+2CS^2)A_{356} \\
B_{323} &= +(+S^2)A_{313} + (+C^2)A_{323} + (-2CS)A_{336} \\
B_{344} &= +(+C^2)A_{344} + (-2CS)A_{345} + (+S^2)A_{355} \\
B_{334} &= +(+C)A_{334} + (-S)A_{335} \\
B_{333} &= +A_{333}
\end{aligned}$$

ROTATION D'UN TENSEUR DE RANG 6 D'UN ANGLE ϕ AUTOUR DE OX

LIRE, $S = \sin \phi$, $C = \cos \phi$, $C^2 = \cos^2 \phi$, $S^3 = \sin^3 \phi$, ETC

$$B_{111} = +A_{111}$$

$$B_{116} = +(+S)A_{115} + (+C)A_{116}$$

$$B_{115} = +(+C)A_{115} + (-S)A_{116}$$

$$B_{112} = +(+C^2)A_{112} + (+S^2)A_{113} + (+2CS)A_{114}$$

$$B_{114} = +(-CS)A_{112} + (+CS)A_{113} + (+C^2 - S^2)A_{114}$$

$$B_{113} = +(+S^2)A_{112} + (+C^2)A_{113} + (-2CS)A_{114}$$

$$B_{166} = +(+S^2)A_{155} + (+2CS)A_{156} + (+C^2)A_{166}$$

$$B_{156} = +(+CS)A_{155} + (+C^2 - S^2)A_{156} + (-CS)A_{166}$$

$$B_{126} = +(+C^2S)A_{125} + (+C^3)A_{126} + (+S^3)A_{135}$$

$$+ (+CS^2)A_{136} + (+2CS^2)A_{145} + (+2C^2S)A_{146}$$

$$B_{146} = +(-CS^2)A_{125} + (-C^2S)A_{126} + (+CS^2)A_{135}$$

$$+ (+C^2S)A_{136} + (+C^2S - S^3)A_{145} + (+C^3 - CS^2)A_{146}$$

$$B_{136} = +(+S^3)A_{125} + (+CS^2)A_{126} + (+C^2S)A_{135}$$

$$+ (+C^3)A_{136} + (-2CS^2)A_{145} + (-2C^2S)A_{146}$$

$$B_{155} = +(+C^2)A_{155} + (-2CS)A_{156} + (+S^2)A_{166}$$

$$B_{125} = +(+C^3)A_{125} + (-C^2S)A_{126} + (+CS^2)A_{135}$$

$$+ (-S^3)A_{136} + (+2C^2S)A_{145} + (-2CS^2)A_{146}$$

$$B_{145} = +(-C^2S)A_{125} + (+CS^2)A_{126} + (+C^2S)A_{135}$$

$$+ (-CS^2)A_{136} + (+C^3 - CS^2)A_{145} + (-C^2S + S^3)A_{146}$$

$$B_{135} = +(+CS^2)A_{125} + (-S^3)A_{126} + (+C^3)A_{135}$$

$$+ (-C^2S)A_{136} + (-2C^2S)A_{145} + (+2CS^2)A_{146}$$

$$B_{122} = +(+C^4)A_{122} + (+2C^2S^2)A_{123} + (+4C^3S)A_{124}$$

$$+ (+S^4)A_{133} + (+4CS^3)A_{134} + (+4C^2S^2)A_{144}$$

$$B_{124} = +(-C^3S)A_{122} + (+C^3S - CS^3)A_{123}$$

$$+ (+C^4 - 3C^2S^2)A_{124} + (+CS^3)A_{133} + (+3C^2S^2 - S^4)A_{134}$$

$$+ (+2C^3S - 2CS^3)A_{144}$$

$$B_{123} = +(+C^2S^2)A_{122} + (+C^4 + S^4)A_{123}$$

$$+ (-2C^3S + 2CS^3)A_{124} + (+C^2S^2)A_{133} + (+2C^3S - 2CS^3)A_{134}$$

$$+ (-4C^2S^2)A_{144}$$

$$B_{144} = +(+C^2S^2)A_{122} + (-2C^2S^2)A_{123}$$

$$+ (-2C^3S + 2CS^3)A_{124} + (+C^2S^2)A_{133} + (+2C^3S - 2CS^3)A_{134}$$

$$+ (+C^4 - 2C^2S^2 + S^4)A_{144}$$

$$B_{134} = +(-CS^3)A_{122} + (-C^3S + CS^3)A_{123}$$

$$+ (+3C^2S^2 - S^4)A_{124} + (+C^3S)A_{133} + (+C^4 - 3C^2S^2)A_{134}$$

$$+ (-2C^3S + 2CS^3)A_{144}$$

$$B_{133} = +(+S^4)A_{122} + (+2C^2S^2)A_{123} + (-4CS^3)A_{124}$$

$$+ (+C^4)A_{133} + (-4C^3S)A_{134} + (+4C^2S^2)A_{144}$$

$$B_{666} = +(+S^3)A_{555} + (+3CS^2)A_{556} + (+3C^2S)A_{566}$$

$$+ (+C^3)A_{666}$$

$$B_{566} = +(+CS^2)A_{555} + (+2C^2S - S^3)A_{556}$$

$$+ (+C^3 - 2CS^2)A_{566} + (-C^2S)A_{666}$$

$$B_{266} = +(+C^2S^2)A_{255} + (+2C^3S)A_{256}$$

$$+ (+C^4)A_{266} + (+S^4)A_{355} + (+2CS^3)A_{356}$$

$$+ (+C^2S^2)A_{366} + (+2CS^3)A_{455} + (+4C^2S^2)A_{456}$$

$$+ (+2C^3S)A_{466}$$

$$B_{466} = +(-CS^3)A_{255} + (-2C^2S^2)A_{256}$$

$$+ (-C^3S)A_{266} + (+CS^3)A_{355} + (+2C^2S^2)A_{356}$$

$$+ (+C^3S)A_{366} + (+C^2S^2 - S^4)A_{455} + (+2C^3S - 2CS^3)A_{456}$$

$$+ (+C^4 - C^2S^2)A_{466}$$

$$B_{366} = +(+S^4)A_{255} + (+2CS^3)A_{256} + (+C^2S^2)A_{266}$$

$$+ (+C^2S^2)A_{355} + (+2C^3S)A_{356} + (+C^4)A_{366}$$

$$+ (-2CS^3)A_{455} + (-4C^2S^2)A_{456} + (-2C^3S)A_{466}$$

$$B_{556} = +(+C^2S)A_{555} + (+C^3 - 2CS^2)A_{556}$$

$$+ (-2C^2S + S^3)A_{566} + (+CS^2)A_{666}$$

$$B_{256} = +(+C^3S)A_{255} + (+C^4 - C^2S^2)A_{256}$$

$$+ (-C^3S)A_{266} + (+CS^3)A_{355} + (+C^2S^2 - S^4)A_{356}$$

$$+ (-CS^3)A_{366} + (+2C^2S^2)A_{455} + (+2C^3S - 2CS^3)A_{456}$$

$$+ (-2C^2S^2)A_{466}$$

$$B_{456} = +(-C^2S^2)A_{255} + (-C^3S + CS^3)A_{256}$$

$$+ (+C^2S^2)A_{266} + (+C^2S^2)A_{355} + (+C^3S - CS^3)A_{356}$$

$$+ (-C^2S^2)A_{366} + (+C^3S - CS^3)A_{455} + (+C^4 - 2C^2S^2 + S^4)A_{456}$$

$$+ (-C^3S + CS^3)A_{466}$$

$$B_{356} = +(+CS^3)A_{255} + (+C^2S^2 - S^4)A_{256}$$

$$+ (-CS^3)A_{266} + (+C^3S)A_{355} + (+C^4 - C^2S^2)A_{356}$$

$$+ (-C^3S)A_{366} + (-2C^2S^2)A_{455} + (-2C^3S + 2CS^3)A_{456}$$

$$+ (+2C^2S^2)A_{466}$$

$$B_{226} = +(+C^4S)A_{225} + (+C^5)A_{226} + (+2C^2S^3)A_{235}$$

$$+ (+2C^3S^2)A_{236} + (+4C^3S^2)A_{245} + (+4C^4S)A_{246}$$

$$+ (+S^5)A_{335} + (+CS^4)A_{336} + (+4CS^4)A_{345}$$

$$+ (+4C^2S^3)A_{346} + (+4C^2S^3)A_{445} + (+4C^3S^2)A_{446}$$

$$B_{246} = +(-C^3S^2)A_{225} + (-C^4S)A_{226} + (+C^3S^2 - CS^4)A_{235}$$

$$+ (+C^4S - C^2S^3)A_{236} + (+C^4S - 3C^2S^3)A_{245}$$

$$+ (+C^5 - 3C^3S^2)A_{246} + (+CS^4)A_{335} + (+C^2S^3)A_{336}$$

$$+ (+3C^2S^3 - S^5)A_{345} + (+3C^3S^2 - CS^4)A_{346}$$

$$+ (+2C^3S^2 - 2CS^4)A_{445} + (+2C^4S - 2C^2S^3)A_{446}$$

$$B_{236} = +(+C^2S^3)A_{225} + (+C^3S^2)A_{226} + (+C^4S + S^5)A_{235}$$

$$+ (+C^5 + CS^4)A_{236} + (-2C^3S^2 + 2CS^4)A_{245}$$

$$+ (-2C^4S + 2C^2S^3)A_{246} + (+C^2S^3)A_{335} + (+C^3S^2)A_{336}$$

$$+ (+2C^3S^2 - 2CS^4)A_{345} + (+2C^4S - 2C^2S^3)A_{346}$$

$$+ (-4C^2S^3)A_{445} + (-4C^3S^2)A_{446}$$

$$B_{446} = +(+C^2S^3)A_{225} + (+C^3S^2)A_{226} + (-2C^2S^3)A_{235}$$

$$+ (-2C^3S^2)A_{236} + (-2C^3S^2 + 2CS^4)A_{245}$$

$$+ (-2C^4S + 2C^2S^3)A_{246} + (+C^2S^3)A_{335} + (+C^3S^2)A_{336}$$

$$+ (+2C^3S^2 - 2CS^4)A_{345} + (+2C^4S - 2C^2S^3)A_{346}$$

$$+ (+C^4S - 2C^2S^3 + S^5)A_{445} + (+C^5 - 2C^3S^2 + CS^4)A_{446}$$

$$B_{346} = +(-CS^4)A_{225} + (-C^2S^3)A_{226} + (-C^3S^2 + CS^4)A_{235}$$

$$+ (-C^4S + C^2S^3)A_{236} + (+3C^2S^3 - S^5)A_{245} + (+3C^3S^2 - CS^4)A_{246}$$

$$+ (+C^3S^2)A_{335} + (+C^4S)A_{336} + (+C^4S - 3C^2S^3)A_{345}$$

$$+ (+C^5 - 3C^3S^2)A_{346} + (-2C^3S^2 + 2CS^4)A_{445}$$

$$+ (-2C^4S + 2C^2S^3)A_{446}$$

$$\begin{aligned}
B_{336} &= + (S^5) A_{225} + (CS^4) A_{226} + (2C^2S^3) A_{235} \\
&+ (2C^3S^2) A_{236} + (-4CS^4) A_{245} + (-4C^2S^3) A_{246} \\
&+ (C^4S) A_{335} + (C^5) A_{336} + (-4C^3S^2) A_{345} \\
&+ (-4C^4S) A_{346} + (4C^2S^3) A_{445} + (4C^3S^2) A_{446} \\
B_{555} &= + (C^3) A_{555} + (-3C^2S) A_{556} + (3CS^2) A_{566} \\
&+ (-S^3) A_{666} \\
B_{255} &= + (C^4) A_{255} + (-2C^3S) A_{256} + (C^2S^2) A_{266} \\
&+ (C^2S^2) A_{355} + (-2CS^3) A_{356} + (S^4) A_{366} \\
&+ (2C^3S) A_{455} + (-4C^2S^2) A_{456} + (2CS^3) A_{466} \\
B_{455} &= + (-C^3S) A_{255} + (2C^2S^2) A_{256} \\
&+ (-CS^3) A_{266} + (C^3S) A_{355} + (-2C^2S^2) A_{356} \\
&+ (CS^3) A_{366} + (C^4 - C^2S^2) A_{455} + (-2C^3S + 2CS^3) A_{456} \\
&+ (C^2S^2 - S^4) A_{466} \\
B_{355} &= + (C^2S^2) A_{255} + (-2CS^3) A_{256} \\
&+ (S^4) A_{266} + (C^4) A_{355} + (-2C^3S) A_{356} \\
&+ (C^2S^2) A_{366} + (-2C^3S) A_{455} + (4C^2S^2) A_{456} \\
&+ (-2CS^3) A_{466} \\
B_{225} &= + (C^5) A_{225} + (-C^4S) A_{226} + (2C^3S^2) A_{235} \\
&+ (-2C^2S^3) A_{236} + (4C^4S) A_{245} + (-4C^3S^2) A_{246} \\
&+ (CS^4) A_{335} + (-S^5) A_{336} + (4C^2S^3) A_{345} \\
&+ (-4CS^4) A_{346} + (4C^3S^2) A_{445} + (-4C^2S^3) A_{446} \\
B_{245} &= + (-C^4S) A_{225} + (C^3S^2) A_{226} + (C^4S - C^2S^3) A_{235} \\
&+ (-C^3S^2 + CS^4) A_{236} + (C^5 - 3C^3S^2) A_{245} + (-C^4S + 3C^2S^3) A_{246} \\
&+ (C^2S^3) A_{335} + (-CS^4) A_{336} + (3C^3S^2 - CS^4) A_{345} \\
&+ (-3C^2S^3 + S^5) A_{346} + (2C^4S - 2C^2S^3) A_{445} \\
&+ (-2C^3S^2 + 2CS^4) A_{446} \\
B_{235} &= + (C^3S^2) A_{225} + (-C^2S^3) A_{226} + (C^5 + CS^4) A_{235} \\
&+ (-C^4S - S^5) A_{236} + (-2C^4S + 2C^2S^3) A_{245} \\
&+ (2C^3S^2 - 2CS^4) A_{246} + (C^3S^2) A_{335} + (-C^2S^3) A_{336} \\
&+ (2C^4S - 2C^2S^3) A_{345} + (-2C^3S^2 + 2CS^4) A_{346} \\
&+ (-4C^3S^2) A_{445} + (4C^2S^3) A_{446} \\
B_{445} &= + (C^3S^2) A_{225} + (-C^2S^3) A_{226} + (-2C^3S^2) A_{235} \\
&+ (2C^2S^3) A_{236} + (-2C^4S + 2C^2S^3) A_{245} \\
&+ (2C^3S^2 - 2CS^4) A_{246} + (C^3S^2) A_{335} + (-C^2S^3) A_{336} \\
&+ (2C^4S - 2C^2S^3) A_{345} + (-2C^3S^2 + 2CS^4) A_{346} \\
&+ (C^5 - 2C^3S^2 + CS^4) A_{445} + (-C^4S + 2C^2S^3 - S^5) A_{446} \\
B_{345} &= + (-C^2S^3) A_{225} + (CS^4) A_{226} + (-C^4S + C^2S^3) A_{235} \\
&+ (C^3S^2 - CS^4) A_{236} + (3C^3S^2 - CS^4) A_{245} \\
&+ (-3C^2S^3 + S^5) A_{246} + (C^4S) A_{335} + (-C^3S^2) A_{336} \\
&+ (C^5 - 3C^3S^2) A_{345} + (-C^4S + 3C^2S^3) A_{346} \\
&+ (-2C^4S + 2C^2S^3) A_{445} + (2C^3S^2 - 2CS^4) A_{446} \\
B_{335} &= + (CS^4) A_{225} + (-S^5) A_{226} + (2C^3S^2) A_{235} \\
&+ (-2C^2S^3) A_{236} + (-4C^2S^3) A_{245} + (4CS^4) A_{246} \\
&+ (C^5) A_{335} + (-C^4S) A_{336} + (-4C^4S) A_{345} \\
&+ (4C^3S^2) A_{346} + (4C^3S^2) A_{445} + (-4C^2S^3) A_{446} \\
B_{222} &= + (C^6) A_{222} + (3C^4S^2) A_{223} + (6C^5S) A_{224} \\
&+ (3C^2S^4) A_{233} + (12C^3S^3) A_{234} + (12C^4S^2) A_{244} \\
&+ (S^6) A_{333} + (6CS^5) A_{334} + (12C^2S^4) A_{344} \\
&+ (8C^3S^3) A_{444}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{224} &= + (-C^5S) A_{222} + (C^5S - 2C^3S^3) A_{223} \\
&+ (C^6 - 5C^4S^2) A_{224} + (2C^3S^3 - CS^5) A_{233} \\
&+ (6C^4S^2 - 6C^2S^4) A_{234} + (4C^5S - 8C^3S^3) A_{244} \\
&+ (CS^5) A_{333} + (5C^2S^4 - S^6) A_{334} + (8C^3S^3 - 4CS^5) A_{344} \\
&+ (4C^4S^2 - 4C^2S^4) A_{444} \\
B_{223} &= + (C^4S^2) A_{222} + (C^6 + 2C^2S^4) A_{223} \\
&+ (-2C^5S + 4C^3S^3) A_{224} + (2C^4S^2 + S^6) A_{233} \\
&+ (4C^5S - 4C^3S^3 + 4CS^5) A_{234} + (-8C^4S^2 + 4C^2S^4) A_{244} \\
&+ (C^2S^4) A_{333} + (4C^3S^3 - 2CS^5) A_{334} + (4C^4S^2 - 8C^2S^4) A_{344} \\
&+ (-8C^3S^3) A_{444} \\
B_{244} &= + (C^4S^2) A_{222} + (-2C^4S^2 + C^2S^4) A_{223} \\
&+ (-2C^5S + 4C^3S^3) A_{224} + (C^4S^2 - 2C^2S^4) A_{233} \\
&+ (2C^5S - 8C^3S^3 + 2CS^5) A_{234} + (C^6 - 6C^4S^2 + 5C^2S^4) A_{244} \\
&+ (C^2S^4) A_{333} + (4C^3S^3 - 2CS^5) A_{334} + (5C^4S^2 - 6C^2S^4 + S^6) A_{344} \\
&+ (2C^5S - 4C^3S^3 + 2CS^5) A_{444} \\
B_{234} &= + (-C^3S^3) A_{222} + (-C^5S + C^3S^3 - CS^5) A_{223} \\
&+ (3C^4S^2 - 3C^2S^4) A_{224} + (C^5S - C^3S^3 + CS^5) A_{233} \\
&+ (C^6 - 5C^4S^2 + 5C^2S^4 - S^6) A_{234} + (-2C^5S + 8C^3S^3 - 2CS^5) A_{244} \\
&+ (C^3S^3) A_{333} + (3C^4S^2 - 3C^2S^4) A_{334} + (2C^5S - 8C^3S^3 + 2CS^5) A_{344} \\
&+ (-4C^4S^2 + 4C^2S^4) A_{444} \\
B_{233} &= + (C^2S^4) A_{222} + (2C^4S^2 + S^6) A_{223} \\
&+ (-4C^3S^3 + 2CS^5) A_{224} + (C^6 + 2C^2S^4) A_{233} \\
&+ (-4C^5S + 4C^3S^3 - 4CS^5) A_{234} + (4C^4S^2 - 8C^2S^4) A_{244} \\
&+ (C^4S^2) A_{333} + (2C^5S - 4C^3S^3) A_{334} + (-8C^4S^2 + 4C^2S^4) A_{344} \\
&+ (8C^3S^3) A_{444} \\
B_{444} &= + (-C^3S^3) A_{222} + (3C^3S^3) A_{223} \\
&+ (3C^4S^2 - 3C^2S^4) A_{224} + (-3C^3S^3) A_{233} \\
&+ (-6C^4S^2 + 6C^2S^4) A_{234} + (-3C^5S + 6C^3S^3 - 3CS^5) A_{244} \\
&+ (C^3S^3) A_{333} + (3C^4S^2 - 3C^2S^4) A_{334} + (3C^5S - 6C^3S^3 + 3CS^5) A_{344} \\
&+ (C^6 - 3C^4S^2 + 3C^2S^4 - S^6) A_{444} \\
B_{344} &= + (C^2S^4) A_{222} + (C^4S^2 - 2C^2S^4) A_{223} \\
&+ (-4C^3S^3 + 2CS^5) A_{224} + (-2C^4S^2 + C^2S^4) A_{233} \\
&+ (-2C^5S + 8C^3S^3 - 2CS^5) A_{234} + (5C^4S^2 - 6C^2S^4 + S^6) A_{244} \\
&+ (C^4S^2) A_{333} + (2C^5S - 4C^3S^3) A_{334} + (C^6 - 6C^4S^2 + 5C^2S^4) A_{344} \\
&+ (-2C^5S + 4C^3S^3 - 2CS^5) A_{444} \\
B_{334} &= + (-CS^5) A_{222} + (-2C^3S^3 + CS^5) A_{223} \\
&+ (5C^2S^4 - S^6) A_{224} + (-C^5S + 2C^3S^3) A_{233} \\
&+ (6C^4S^2 - 6C^2S^4) A_{234} + (-8C^3S^3 + 4CS^5) A_{244} \\
&+ (C^5S) A_{333} + (C^6 - 5C^4S^2) A_{334} + (-4C^5S + 8C^3S^3) A_{344} \\
&+ (4C^4S^2 - 4C^2S^4) A_{444} \\
B_{333} &= + (S^6) A_{222} + (3C^2S^4) A_{223} + (-6CS^5) A_{224} \\
&+ (3C^4S^2) A_{233} + (-12C^3S^3) A_{234} + (12C^2S^4) A_{244} \\
&+ (C^6) A_{333} + (-6C^5S) A_{334} + (12C^4S^2) A_{344} \\
&+ (-8C^3S^3) A_{444}
\end{aligned}$$

ROTATION D'UN TENSEUR DE RANG 6 D'UN ANGLE ϕ AUTOUR DE OYLIRE : $S = \sin \phi$, $C = \cos \phi$, $C^2 = \cos^2 \phi$, $S^3 = \sin^3 \phi$, ETC

$$\begin{aligned} B_{111} = & (+C^6)A_{111} + (+3C^4S^2)A_{113} + (-6C^5S)A_{115} \\ & + (+3C^2S^4)A_{133} + (-12C^3S^3)A_{135} + (+12C^4S^4)A_{155} \\ & + (+S^6)A_{333} + (-6CS^5)A_{335} + (+12C^2S^4)A_{355} \\ & + (-8C^3S^3)A_{555} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{116} = & (-C^4S)A_{114} + (+C^5)A_{116} + (-2C^2S^3)A_{134} \\ & + (+2C^3S^2)A_{136} + (+4C^3S^2)A_{145} + (-4C^4S)A_{156} \\ & + (-S^5)A_{334} + (+CS^4)A_{336} + (+4CS^4)A_{345} \\ & + (-4C^2S^3)A_{356} + (-4C^2S^3)A_{455} + (+4C^3S^2)A_{556} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{115} = & (+C^5S)A_{111} + (-C^5S + 2C^3S^3)A_{113} \\ & + (+C^6 - 5C^4S^2)A_{115} + (-2C^3S^3 + CS^5)A_{133} \\ & + (+6C^4S^2 - 6C^2S^4)A_{135} + (-4C^5S + 8C^3S^3)A_{155} \\ & + (-CS^5)A_{333} + (+5C^2S^4 - S^6)A_{335} + (-8C^3S^3 + 4CS^5)A_{355} \\ & + (+4C^4S^2 - 4C^2S^4)A_{555} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{112} = & (+C^4)A_{112} + (+2C^2S^2)A_{123} + (-4C^3S)A_{125} \\ & + (+S^4)A_{233} + (-4CS^3)A_{235} + (+4C^2S^2)A_{255} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{114} = & (+C^5)A_{114} + (+C^4S)A_{116} + (+2C^3S^2)A_{134} \\ & + (+2C^2S^3)A_{136} + (-4C^4S)A_{145} + (-4C^3S^2)A_{156} \\ & + (+CS^4)A_{334} + (+S^5)A_{336} + (-4C^2S^3)A_{345} \\ & + (-4CS^4)A_{356} + (+4C^3S^2)A_{455} + (+4C^2S^3)A_{556} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{113} = & (+C^4S^2)A_{111} + (+C^6 + 2C^2S^4)A_{113} \\ & + (+2C^5S - 4C^3S^3)A_{115} + (+2C^4S^2 + S^6)A_{133} \\ & + (-4C^5S + 4C^3S^3 - 4CS^5)A_{135} + (-8C^4S^2 + 4C^2S^4)A_{155} \\ & + (+C^2S^4)A_{333} + (-4C^3S^3 + 2CS^5)A_{335} + (+4C^4S^2 - 8C^2S^4)A_{355} \\ & + (+8C^3S^3)A_{555} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{166} = & (+C^2S^2)A_{144} + (-2C^3S)A_{146} \\ & + (+C^4)A_{166} + (+S^4)A_{344} + (-2CS^3)A_{346} \\ & + (+C^2S^2)A_{366} + (-2CS^3)A_{445} + (+4C^2S^2)A_{456} \\ & + (-2C^3S)A_{566} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{156} = & (-C^3S^2)A_{114} + (+C^4S)A_{116} + (+C^3S^2 - CS^4)A_{134} \\ & + (-C^4S + C^2S^3)A_{136} + (-C^4S + 3C^2S^3)A_{145} \\ & + (+C^6 - 3C^3S^2)A_{156} + (+CS^4)A_{334} + (-C^2S^3)A_{336} \\ & + (-3C^2S^3 + S^5)A_{345} + (+3C^3S^2 - CS^4)A_{356} \\ & + (+2C^3S^2 - 2CS^4)A_{455} + (-2C^4S + 2C^2S^3)A_{556} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{126} = & (+C^2S)A_{124} + (+C^3)A_{126} + (-S^3)A_{234} \\ & + (+CS^2)A_{236} + (+2CS^2)A_{245} + (-2C^2S)A_{256} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{146} = & (-C^3S)A_{144} + (+C^4 - C^2S^2)A_{146} \\ & + (+C^3S)A_{166} + (-CS^3)A_{344} + (+C^2S^2 - S^4)A_{346} \\ & + (+CS^3)A_{366} + (+2C^2S^2)A_{445} + (-2C^3S + 2CS^3)A_{456} \\ & + (-2C^2S^2)A_{566} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{136} = & (-C^2S^3)A_{114} + (+C^3S^2)A_{116} + (-C^4S - S^5)A_{134} \\ & + (+C^5 + CS^4)A_{136} + (-2C^3S^2 + 2CS^4)A_{145} \\ & + (+2C^4S - 2C^2S^3)A_{156} + (-C^2S^3)A_{334} + (+C^3S^2)A_{336} \\ & + (+2C^3S^2 - 2CS^4)A_{345} + (-2C^4S + 2C^2S^3)A_{356} \\ & + (+4C^2S^3)A_{455} + (-4C^3S^2)A_{556} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{155} = & (+C^4S^2)A_{111} + (-2C^4S^2 + C^2S^4)A_{113} \\ & + (+2C^5S - 4C^3S^3)A_{115} + (+C^4S^2 - 2C^2S^4)A_{133} \\ & + (-2C^5S + 8C^3S^3 - 2CS^5)A_{135} + (+C^6 - 6C^4S^2 + 5C^2S^4)A_{155} \\ & + (+C^2S^4)A_{333} + (-4C^3S^3 + 2CS^5)A_{335} + (+5C^4S^2 - 6C^2S^4 + S^6)A_{355} \\ & + (-2C^5S + 4C^3S^3 - 2CS^5)A_{555} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{125} = & (+C^3S)A_{112} + (-C^3S + CS^3)A_{123} \\ & + (+C^4 - 3C^2S^2)A_{125} + (-CS^3)A_{233} + (+3C^2S^2 - S^4)A_{235} \\ & + (-2C^3S + 2CS^3)A_{255} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{145} = & (+C^4S)A_{114} + (+C^3S^2)A_{116} + (-C^4S + C^2S^3)A_{134} \\ & + (-C^3S^2 + CS^4)A_{136} + (+C^5 - 3C^3S^2)A_{145} + (+C^4S - 3C^2S^3)A_{156} \\ & + (-C^2S^3)A_{334} + (-CS^4)A_{336} + (+3C^3S^2 - CS^4)A_{345} \\ & + (+3C^2S^3 - S^5)A_{356} + (-2C^4S + 2C^2S^3)A_{455} \\ & + (-2C^3S^2 + 2CS^4)A_{556} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{135} = & (+C^3S^3)A_{111} + (+C^5S - C^3S^3 + CS^5)A_{113} \\ & + (+3C^4S^2 - 3C^2S^4)A_{115} + (-C^5S + C^3S^3 - CS^5)A_{133} \\ & + (+C^6 - 5C^4S^2 + 5C^2S^4 - S^6)A_{135} + (+2C^5S - 8C^3S^3 + 2CS^5)A_{155} \\ & + (-C^3S^3)A_{333} + (+3C^4S^2 - 3C^2S^4)A_{335} + (-2C^5S + 8C^3S^3 - 2CS^5)A_{355} \\ & + (-4C^4S^2 + 4C^2S^4)A_{555} \end{aligned}$$

$$B_{122} = (+C^2)A_{122} + (+S^2)A_{223} + (-2CS)A_{225}$$

$$\begin{aligned} B_{124} = & (+C^3)A_{124} + (+C^2S)A_{126} + (+CS^2)A_{234} \\ & + (+S^3)A_{236} + (-2C^2S)A_{245} + (-2CS^2)A_{256} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{123} = & (+C^2S^2)A_{112} + (+C^4 + S^4)A_{123} \\ & + (+2C^3S - 2CS^3)A_{125} + (+C^2S^2)A_{233} + (-2C^3S + 2CS^3)A_{235} \\ & + (-4C^2S^2)A_{255} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{144} = & (+C^4)A_{144} + (+2C^3S)A_{146} + (+C^2S^2)A_{166} \\ & + (+C^2S^2)A_{344} + (+2CS^3)A_{346} + (+S^4)A_{366} \\ & + (-2C^3S)A_{445} + (-4C^2S^2)A_{456} + (-2CS^3)A_{566} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{134} = & (+C^3S^2)A_{114} + (+C^2S^3)A_{116} + (+C^5 + CS^4)A_{134} \\ & + (+C^4S + S^5)A_{136} + (+2C^4S - 2C^2S^3)A_{145} \\ & + (+2C^3S^2 - 2CS^4)A_{156} + (+C^3S^2)A_{334} + (+C^2S^3)A_{336} \\ & + (-2C^4S + 2C^2S^3)A_{345} + (-2C^3S^2 + 2CS^4)A_{356} \\ & + (-4C^3S^2)A_{455} + (-4C^2S^3)A_{556} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{135} = & (+C^2S^4)A_{111} + (+2C^4S^2 + S^6)A_{113} \\ & + (+4C^3S^3 - 2CS^5)A_{115} + (+C^6 + 2C^2S^4)A_{133} \\ & + (+4C^5S - 4C^3S^3 + 4CS^5)A_{135} + (+4C^4S^2 - 8C^2S^4)A_{155} \\ & + (+C^4S^2)A_{333} + (-2C^5S + 4C^3S^3)A_{335} + (-8C^4S^2 + 4C^2S^4)A_{355} \\ & + (-8C^3S^3)A_{555} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{666} = & (+S^3)A_{444} + (+3CS^2)A_{446} + (-3C^2S)A_{466} \\ & + (+C^3)A_{666} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{566} = & (+CS^3)A_{144} + (-2C^2S^2)A_{146} \\ & + (+C^2S)A_{166} + (-CS^3)A_{344} + (+2C^2S^2)A_{346} \\ & + (-C^3S)A_{366} + (+C^2S^2 - S^4)A_{445} + (-2C^3S + 2CS^3)A_{456} \\ & + (+C^4 - C^2S^2)A_{566} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{266} &= + (S^2) A_{244} + (-CS) A_{246} + (C^2) A_{266} \\
B_{466} &= + (CS^2) A_{444} + (-2C^2S + S^3) A_{446} \\
&+ (+C^3 - 2CS^2) A_{466} + (+C^2S) A_{666} \\
B_{366} &= + (+S^4) A_{144} + (-2CS^3) A_{146} + (+C^2S^2) A_{166} \\
&+ (+C^2S^2) A_{344} + (-2C^3S) A_{346} + (+C^4) A_{366} \\
&+ (+2CS^3) A_{445} + (-4C^2S^2) A_{456} + (+2C^3S) A_{566} \\
B_{556} &= + (-C^2S^3) A_{114} + (+C^3S^2) A_{116} + (+2C^2S^3) A_{134} \\
&+ (-2C^3S^2) A_{136} + (-2C^3S^2 + 2CS^4) A_{145} \\
&+ (+2C^4S - 2C^2S^3) A_{156} + (-C^2S^3) A_{334} + (+C^3S^2) A_{336} \\
&+ (+2C^3S^2 - 2CS^4) A_{345} + (-2C^4S + 2C^2S^3) A_{356} \\
&+ (-C^4S + 2C^2S^3 - S^5) A_{455} + (+C^5 - 2C^3S^2 + CS^4) A_{556} \\
B_{256} &= + (-CS^2) A_{124} + (+C^2S) A_{126} + (+CS^2) A_{234} \\
&+ (-C^2S) A_{236} + (-C^2S + S^3) A_{245} + (+C^3 - CS^2) A_{256} \\
B_{456} &= + (-C^2S^2) A_{144} + (+C^3S - CS^3) A_{146} \\
&+ (+C^2S^2) A_{166} + (+C^2S^2) A_{344} + (-C^3S + CS^3) A_{346} \\
&+ (-C^2S^2) A_{366} + (-C^3S + CS^3) A_{445} + (+C^4 - 2C^2S^2 + S^4) A_{456} \\
&+ (+C^3S - CS^3) A_{556} \\
B_{356} &= + (-CS^4) A_{114} + (+C^2S^3) A_{116} + (-C^3S^2 + CS^4) A_{134} \\
&+ (+C^4S - C^2S^3) A_{136} + (-3C^2S^3 + S^5) A_{145} + (+3C^3S^2 - CS^4) A_{156} \\
&+ (+C^3S^2) A_{334} + (-C^4S) A_{336} + (-C^4S + 3C^2S^3) A_{345} \\
&+ (+C^5 - 3C^3S^2) A_{356} + (-2C^3S^2 + 2CS^4) A_{455} \\
&+ (+2C^4S - 2C^2S^3) A_{556} \\
B_{226} &= + (-S) A_{224} + (+C) A_{226} \\
B_{246} &= + (-CS) A_{244} + (+C^2 - S^2) A_{246} + (+CS) A_{266} \\
B_{236} &= + (-S^3) A_{124} + (+CS^2) A_{126} + (-C^2S) A_{234} \\
&+ (+C^3) A_{236} + (-2CS^2) A_{245} + (+2C^2S) A_{256} \\
B_{446} &= + (-C^2S) A_{444} + (+C^3 - 2CS^2) A_{446} \\
&+ (+2C^2S - S^3) A_{466} + (+CS^2) A_{666} \\
B_{346} &= + (-CS^3) A_{144} + (+C^2S^2 - S^4) A_{146} \\
&+ (+CS^3) A_{166} + (-C^3S) A_{344} + (+C^4 - C^2S^2) A_{346} \\
&+ (+C^3S) A_{366} + (-2C^2S^2) A_{445} + (+2C^3S - 2CS^3) A_{456} \\
&+ (+2C^2S^2) A_{556} \\
B_{336} &= + (-S^5) A_{114} + (+C^4S) A_{116} + (-2C^2S^3) A_{134} \\
&+ (+2C^3S^2) A_{136} + (-4CS^4) A_{145} + (+4C^2S^3) A_{156} \\
&+ (-C^4S) A_{334} + (+C^5) A_{336} + (-4C^3S^2) A_{345} \\
&+ (+4C^4S) A_{356} + (-4C^2S^3) A_{455} + (+4C^3S^2) A_{556} \\
B_{555} &= + (+C^3S^3) A_{111} + (-3C^3S^3) A_{113} \\
&+ (+3C^4S^2 - 3C^2S^4) A_{115} + (+3C^3S^3) A_{133} \\
&+ (-6C^4S^2 + 6C^2S^4) A_{135} + (+3C^5S - 6C^3S^3 + 3CS^5) A_{155} \\
&+ (-C^3S^3) A_{333} + (+3C^4S^2 - 3C^2S^4) A_{335} + (-3C^5S + 6C^3S^3 - 3CS^5) A_{355} \\
&+ (+C^6 - 3C^4S^2 + 3C^2S^4 - S^6) A_{555} \\
B_{235} &= + (+C^2S^2) A_{112} + (-2C^2S^2) A_{123} \\
&+ (+2C^3S - 2CS^3) A_{125} + (+C^2S^2) A_{233} + (-2C^3S + 2CS^3) A_{235} \\
&+ (+C^4 - 2C^2S^2 + S^4) A_{255} \\
B_{455} &= + (+C^3S^2) A_{114} + (+C^2S^3) A_{116} + (-2C^3S^2) A_{134} \\
&+ (-2C^2S^3) A_{136} + (+2C^4S - 2C^2S^3) A_{145} \\
&+ (+2C^3S^2 - 2CS^4) A_{156} + (+C^3S^2) A_{334} + (+C^2S^3) A_{336} \\
&+ (-2C^4S + 2C^2S^3) A_{345} + (-2C^3S^2 + 2CS^4) A_{356} \\
&+ (+C^5 - 2C^3S^2 + CS^4) A_{455} + (+C^4S - 2C^2S^3 + S^5) A_{556}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{335} &= + (+C^2S^4) A_{111} + (+C^4S^2 - 2C^2S^4) A_{113} \\
&+ (+4C^3S^3 - 2CS^5) A_{115} + (-2C^4S^2 + C^2S^4) A_{133} \\
&+ (+2C^5S - 8C^3S^3 + 2CS^5) A_{135} + (+5C^4S^2 - 6C^2S^4 + S^6) A_{155} \\
&+ (+C^4S^2) A_{333} + (-2C^5S + 4C^3S^3) A_{335} + (+C^6 - 6C^4S^2 + 5C^2S^4) A_{355} \\
&+ (+2C^5S - 4C^3S^3 + 2CS^5) A_{555} \\
B_{225} &= + (+CS) A_{122} + (-CS) A_{223} + (+C^2 - S^2) A_{225} \\
B_{245} &= + (+C^2S) A_{124} + (+CS^2) A_{126} + (-C^2S) A_{234} \\
&+ (-CS^2) A_{236} + (+C^3 - CS^2) A_{245} + (+C^2S - S^3) A_{256} \\
B_{235} &= + (+CS^3) A_{112} + (+C^3S - CS^3) A_{123} \\
&+ (+3C^2S^2 - S^4) A_{125} + (-C^3S) A_{233} + (+C^4 - 3C^2S^2) A_{235} \\
&+ (+2C^3S - 2CS^3) A_{255} \\
B_{445} &= + (+C^3S) A_{144} + (+2C^2S^2) A_{146} \\
&+ (+CS^3) A_{166} + (-C^3S) A_{344} + (-2C^2S^2) A_{346} \\
&+ (-CS^3) A_{366} + (+C^4 - C^2S^2) A_{445} + (+2C^3S - 2CS^3) A_{456} \\
&+ (+C^2S^2 - S^4) A_{556} \\
B_{345} &= + (+C^2S^3) A_{114} + (+CS^4) A_{116} + (+C^4S - C^2S^3) A_{134} \\
&+ (+C^3S^2 - CS^4) A_{136} + (+3C^3S^2 - CS^4) A_{145} \\
&+ (+3C^2S^3 - S^5) A_{156} + (-C^4S) A_{334} + (-C^3S^2) A_{336} \\
&+ (+C^5 - 3C^3S^2) A_{345} + (+C^4S - 3C^2S^3) A_{356} \\
&+ (+2C^4S - 2C^2S^3) A_{455} + (+2C^3S^2 - 2CS^4) A_{556} \\
B_{338} &= + (+CS^5) A_{111} + (+2C^3S^3 - CS^5) A_{113} \\
&+ (+5C^2S^4 - S^6) A_{115} + (+C^5S - 2C^3S^3) A_{133} \\
&+ (+6C^4S^2 - 6C^2S^4) A_{135} + (+8C^3S^3 - 4CS^5) A_{155} \\
&+ (-C^5S) A_{333} + (+C^6 - 5C^4S^2) A_{335} + (+4C^5S - 8C^3S^3) A_{355} \\
&+ (+4C^4S^2 - 4C^2S^4) A_{555} \\
B_{222} &= + A_{222} \\
B_{224} &= + (+C) A_{224} + (+S) A_{226} \\
B_{223} &= + (+S^2) A_{122} + (+C^2) A_{223} + (+2CS) A_{225} \\
B_{244} &= + (+C^2) A_{244} + (+2CS) A_{246} + (+S^2) A_{266} \\
B_{234} &= + (+CS^2) A_{124} + (+S^3) A_{126} + (+C^3) A_{234} \\
&+ (+C^2S) A_{236} + (+2C^2S) A_{245} + (+2CS^2) A_{256} \\
B_{233} &= + (+S^4) A_{112} + (+2C^2S^2) A_{123} + (+4CS^3) A_{125} \\
&+ (+C^4) A_{233} + (+4C^3S) A_{235} + (+4C^2S^2) A_{255} \\
B_{444} &= + (+C^3) A_{444} + (+3C^2S) A_{446} + (+3CS^2) A_{466} \\
&+ (+S^3) A_{666} \\
B_{344} &= + (+C^2S^2) A_{144} + (+2CS^3) A_{146} \\
&+ (+S^4) A_{166} + (+C^4) A_{344} + (+2C^3S) A_{346} \\
&+ (+C^2S^2) A_{366} + (+2C^3S) A_{445} + (+4C^2S^2) A_{456} \\
&+ (+2CS^3) A_{556} \\
B_{334} &= + (+CS^4) A_{114} + (+S^5) A_{116} + (+2C^3S^2) A_{134} \\
&+ (+2C^2S^3) A_{136} + (+4C^2S^3) A_{145} + (+4CS^4) A_{156} \\
&+ (+C^5) A_{334} + (+C^4S) A_{336} + (+4C^4S) A_{345} \\
&+ (+4C^3S^2) A_{356} + (+4C^3S^2) A_{455} + (+4C^2S^3) A_{556} \\
B_{333} &= + (+S^6) A_{111} + (+3C^2S^4) A_{113} + (+6CS^5) A_{115} \\
&+ (+3C^4S^2) A_{133} + (+12C^3S^3) A_{135} + (+12C^2S^4) A_{155} \\
&+ (+C^6) A_{333} + (+6C^5S) A_{335} + (+12C^4S^2) A_{355} \\
&+ (+8C^3S^3) A_{555}
\end{aligned}$$

ROTATION D'UN TENSEUR DE RANG 6 D'UN ANGLE Φ AUTOUR DE OZLIRE, $S = \sin \Phi$, $C = \cos \Phi$, $C^2 = \cos^2 \Phi$, $S^3 = \sin^3 \Phi$, ETC

$$B_{111} = + (C^6) A_{111} + (+3C^4S^2) A_{112} + (+6C^5S) A_{116} \\ + (+3C^2S^4) A_{122} + (+12C^3S^3) A_{126} + (+12C^4S^2) A_{166} \\ + (+S^6) A_{222} + (+6CS^5) A_{226} + (+12C^2S^4) A_{266} \\ + (+8C^3S^3) A_{666}$$

$$B_{116} = + (-C^5S) A_{111} + (+C^5S - 2C^3S^3) A_{112} \\ + (+C^6 - 5C^4S^2) A_{116} + (+2C^3S^3 - CS^5) A_{122} \\ + (+6C^4S^2 - 6C^2S^4) A_{126} + (+4C^5S - 8C^3S^3) A_{166} \\ + (+CS^5) A_{222} + (+5C^2S^4 - S^6) A_{226} + (+8C^3S^3 - 4CS^5) A_{266} \\ + (+4C^4S^2 - 4C^2S^4) A_{666}$$

$$B_{115} = + (+C^4S) A_{114} + (+C^5) A_{115} + (+2C^2S^3) A_{124} \\ + (+2C^3S^2) A_{125} + (+4C^3S^2) A_{146} + (+4C^4S) A_{156} \\ + (+S^5) A_{224} + (+CS^4) A_{225} + (+4CS^4) A_{246} \\ + (+4C^2S^3) A_{256} + (+4C^2S^3) A_{466} + (+4C^3S^2) A_{566}$$

$$B_{112} = + (+C^4S^2) A_{111} + (+C^6 + 2C^2S^4) A_{112} \\ + (-2C^5S + 4C^3S^3) A_{116} + (+2C^4S^2 + S^6) A_{122} \\ + (+4C^5S - 4C^3S^3 + 4CS^5) A_{126} + (-8C^4S^2 + 4C^2S^4) A_{166} \\ + (+C^2S^4) A_{222} + (+4C^3S^3 - 2CS^5) A_{226} + (+4C^4S^2 - 8C^2S^4) A_{266} \\ + (-8C^3S^3) A_{666}$$

$$B_{114} = + (+C^3) A_{114} + (-C^4S) A_{115} + (+2C^3S^2) A_{124} \\ + (-2C^2S^3) A_{125} + (+4C^4S) A_{146} + (-4C^3S^2) A_{156} \\ + (+CS^4) A_{224} + (-S^5) A_{225} + (+4C^2S^3) A_{246} \\ + (-4CS^4) A_{256} + (+4C^3S^2) A_{466} + (-4C^2S^3) A_{566}$$

$$B_{113} = + (+C^4) A_{113} + (+2C^2S^2) A_{123} + (+4C^3S) A_{136} \\ + (+S^4) A_{223} + (+4CS^3) A_{236} + (+4C^2S^2) A_{366}$$

$$B_{166} = + (+C^4S^2) A_{111} + (-2C^4S^2 + C^2S^4) A_{112} \\ + (-2C^5S + 4C^3S^3) A_{116} + (+C^4S^2 - 2C^2S^4) A_{122} \\ + (+2C^5S - 8C^3S^3 + 2CS^5) A_{126} + (+C^6 - 6C^4S^2 + 5C^2S^4) A_{166} \\ + (+C^2S^4) A_{222} + (+4C^3S^3 - 2CS^5) A_{226} + (+5C^4S^2 - 6C^2S^4 + S^6) A_{266} \\ + (+2C^5S - 4C^3S^3 + 2CS^5) A_{666}$$

$$B_{156} = + (-C^3S^2) A_{114} + (-C^4S) A_{115} + (+C^3S^2 - CS^4) A_{124} \\ + (+C^4S - C^2S^3) A_{125} + (+C^4S - 3C^2S^3) A_{146} \\ + (+C^5 - 3C^3S^2) A_{156} + (+CS^4) A_{224} + (+C^2S^3) A_{225} \\ + (+3C^2S^3 - S^5) A_{246} + (+3C^3S^2 - CS^4) A_{256} \\ + (+2C^3S^2 - 2CS^4) A_{466} + (+2C^4S - 2C^2S^3) A_{566}$$

$$B_{126} = + (-C^3S^3) A_{111} + (-C^5S + C^3S^3 - CS^5) A_{112} \\ + (+3C^4S^2 - 3C^2S^4) A_{116} + (+C^5S - C^3S^3 + CS^5) A_{122} \\ + (+C^6 - 5C^4S^2 + 5C^2S^4 - S^6) A_{126} + (-2C^5S + 8C^3S^3 - 2CS^5) A_{166} \\ + (+C^3S^3) A_{222} + (+3C^4S^2 - 3C^2S^4) A_{226} + (+2C^5S - 8C^3S^3 + 2CS^5) A_{266} \\ + (-4C^4S^2 + 4C^2S^4) A_{666}$$

$$B_{146} = + (-C^4S) A_{114} + (+C^3S^2) A_{115} + (+C^4S - C^2S^3) A_{124} \\ + (-C^3S^2 + CS^4) A_{125} + (+C^5 - 3C^3S^2) A_{146} + (-C^4S + 3C^2S^3) A_{156} \\ + (+C^2S^3) A_{224} + (-CS^4) A_{225} + (+3C^3S^2 - CS^4) A_{246} \\ + (-3C^2S^3 + S^5) A_{256} + (+2C^4S - 2C^2S^3) A_{466} \\ + (-2C^3S^2 + 2CS^4) A_{566}$$

$$B_{136} = + (-C^3S) A_{113} + (+C^3S - CS^3) A_{123} \\ + (+C^4 - 3C^2S^2) A_{136} + (+CS^3) A_{223} + (+3C^2S^2 - S^4) A_{236} \\ + (+2C^3S - 2CS^3) A_{366}$$

$$B_{155} = + (+C^2S^2) A_{144} + (+2C^3S) A_{145} \\ + (+C^4) A_{155} + (+S^4) A_{244} + (+2CS^3) A_{245} \\ + (+C^2S^2) A_{255} + (+2CS^3) A_{446} + (+4C^2S^2) A_{456} \\ + (+2C^3S) A_{556}$$

$$B_{125} = + (+C^2S^3) A_{114} + (+C^3S^2) A_{115} + (+C^4S + S^5) A_{124} \\ + (+C^5 + CS^4) A_{125} + (-2C^3S^2 + 2CS^4) A_{146} \\ + (-2C^4S + 2C^2S^3) A_{156} + (+C^2S^3) A_{224} + (+C^3S^2) A_{225} \\ + (+2C^3S^2 - 2CS^4) A_{246} + (+2C^4S - 2C^2S^3) A_{256} \\ + (-4C^2S^3) A_{466} + (-4C^3S^2) A_{566}$$

$$B_{145} = + (+C^3S) A_{144} + (+C^4 - C^2S^2) A_{145} \\ + (-C^3S) A_{155} + (+CS^3) A_{244} + (+C^2S^2 - S^4) A_{245} \\ + (-CS^3) A_{255} + (+2C^2S^2) A_{446} + (+2C^3S - 2CS^3) A_{456} \\ + (-2C^2S^2) A_{556}$$

$$B_{135} = + (+C^2S) A_{134} + (+C^3) A_{135} + (+S^3) A_{234} \\ + (+CS^2) A_{235} + (+2CS^2) A_{346} + (+2C^2S) A_{356}$$

$$B_{122} = + (+C^2S^4) A_{111} + (+2C^4S^2 + S^6) A_{112} \\ + (-4C^3S^3 + 2CS^5) A_{116} + (+C^6 + 2C^2S^4) A_{122} \\ + (-4C^5S + 4C^3S^3 - 4CS^5) A_{126} + (+4C^4S^2 - 8C^2S^4) A_{166} \\ + (+C^4S^2) A_{222} + (+2C^5S - 4C^3S^3) A_{226} + (-8C^4S^2 + 4C^2S^4) A_{266} \\ + (+8C^3S^3) A_{666}$$

$$B_{124} = + (+C^3S^2) A_{114} + (-C^2S^3) A_{115} + (+C^5 + CS^4) A_{124} \\ + (-C^4S - S^5) A_{125} + (-2C^4S + 2C^2S^3) A_{146} \\ + (+2C^3S^2 - 2CS^4) A_{156} + (+C^3S^2) A_{224} + (-C^2S^3) A_{225} \\ + (+2C^4S - 2C^2S^3) A_{246} + (-2C^3S^2 + 2CS^4) A_{256} \\ + (-4C^3S^2) A_{466} + (+4C^2S^3) A_{566}$$

$$B_{123} = + (+C^2S^2) A_{113} + (+C^4 + S^4) A_{123} \\ + (-2C^3S + 2CS^3) A_{136} + (+C^2S^2) A_{223} + (+2C^3S - 2CS^3) A_{236} \\ + (-4C^2S^2) A_{366}$$

$$B_{144} = + (+C^4) A_{144} + (-2C^3S) A_{145} + (+C^2S^2) A_{188} \\ + (+C^2S^2) A_{244} + (-2CS^3) A_{245} + (+S^4) A_{255} \\ + (+2C^3S) A_{446} + (-4C^2S^2) A_{456} + (+2CS^3) A_{556}$$

$$B_{134} = + (+C^3) A_{134} + (-C^2S) A_{135} + (+CS^2) A_{234} \\ + (-S^3) A_{235} + (+2C^2S) A_{346} + (-2CS^2) A_{356}$$

$$B_{133} = + (+C^2) A_{133} + (+S^2) A_{233} + (+2CS) A_{336}$$

$$B_{666} = + (-C^3S^3) A_{111} + (+3C^3S^3) A_{112} \\ + (+3C^4S^2 - 3C^2S^4) A_{116} + (-3C^3S^3) A_{122} \\ + (-6C^4S^2 + 6C^2S^4) A_{126} + (-3C^5S + 6C^3S^3 - 3CS^5) A_{166} \\ + (+C^3S^3) A_{222} + (+3C^4S^2 - 3C^2S^4) A_{226} + (+3C^5S - 6C^3S^3 + 3CS^5) A_{266} \\ + (+C^6 - 3C^4S^2 + 3C^2S^4 - S^6) A_{666}$$

$$B_{566} = + (+C^2S^3) A_{114} + (+C^3S^2) A_{115} + (-2C^2S^3) A_{124} \\ + (-2C^3S^2) A_{125} + (-2C^3S^2 + 2CS^4) A_{146} \\ + (-2C^4S + 2C^2S^3) A_{156} + (+C^2S^3) A_{224} + (+C^3S^2) A_{225} \\ + (+2C^3S^2 - 2CS^4) A_{246} + (+2C^4S - 2C^2S^3) A_{256} \\ + (+C^4S - 2C^2S^3 + S^5) A_{466} + (+C^5 - 2C^3S^2 + CS^4) A_{566}$$

$$\begin{aligned}
B_{256} &= + (C^2S^4)A_{111} + (C^4S^2 - 2C^2S^4)A_{112} \\
&+ (-4C^3S^3 + 2CS^5)A_{116} + (-2C^4S^2 + C^2S^4)A_{122} \\
&+ (-2C^5S + 8C^3S^3 - 2CS^5)A_{126} + (5C^4S^2 - 6C^2S^4 + S^6)A_{166} \\
&+ (C^4S^2)A_{222} + (2C^5S - 4C^3S^3)A_{226} + (C^6 - 6C^4S^2 + 5C^2S^4)A_{266} \\
&+ (-2C^5S + 4C^3S^3 - 2CS^5)A_{666} \\
B_{466} &= + (C^3S^2)A_{114} + (-C^2S^3)A_{115} + (-2C^3S^2)A_{124} \\
&+ (2C^2S^3)A_{125} + (-2C^4S + 2C^2S^3)A_{146} \\
&+ (2C^3S^2 - 2CS^4)A_{156} + (C^3S^2)A_{224} + (-C^2S^3)A_{225} \\
&+ (2C^4S - 2C^2S^3)A_{246} + (-2C^3S^2 + 2CS^4)A_{256} \\
&+ (C^5 - 2C^3S^2 + CS^4)A_{466} + (-C^4S + 2C^2S^3 - S^5)A_{566} \\
B_{366} &= + (C^2S^2)A_{113} + (-2C^2S^2)A_{123} \\
&+ (-2C^3S + 2CS^3)A_{136} + (C^2S^2)A_{223} + (2C^3S - 2CS^3)A_{236} \\
&+ (C^4 - 2C^2S^2 + S^4)A_{366} \\
B_{556} &= + (-CS^3)A_{144} + (-2C^2S^2)A_{145} \\
&+ (-C^3S)A_{155} + (CS^3)A_{244} + (2C^2S^2)A_{245} \\
&+ (C^3S)A_{255} + (C^2S^2 - S^4)A_{446} + (2C^3S - 2CS^3)A_{456} \\
&+ (C^4 - C^2S^2)A_{556} \\
B_{256} &= + (-CS^4)A_{114} + (-C^2S^3)A_{115} + (-C^3S^2 + CS^4)A_{124} \\
&+ (-C^4S + C^2S^3)A_{125} + (3C^2S^3 - S^5)A_{146} + (3C^3S^2 - CS^4)A_{156} \\
&+ (C^3S^2)A_{224} + (C^4S)A_{225} + (C^4S - 3C^2S^3)A_{246} \\
&+ (C^5 - 3C^3S^2)A_{256} + (-2C^3S^2 + 2CS^4)A_{466} \\
&+ (-2C^4S + 2C^2S^3)A_{566} \\
B_{456} &= + (-C^2S^2)A_{144} + (-C^3S + CS^3)A_{145} \\
&+ (C^2S^2)A_{155} + (C^2S^2)A_{244} + (C^3S - CS^3)A_{245} \\
&+ (-C^2S^2)A_{255} + (C^3S - CS^3)A_{446} + (C^4 - 2C^2S^2 + S^4)A_{456} \\
&+ (-C^3S + CS^3)A_{556} \\
B_{356} &= + (-CS^2)A_{134} + (-C^2S)A_{135} + (CS^2)A_{234} \\
&+ (C^2S)A_{235} + (C^2S - S^3)A_{346} + (C^3 - CS^2)A_{356} \\
B_{226} &= + (-CS^3)A_{111} + (-2C^3S^3 + CS^5)A_{112} \\
&+ (5C^2S^4 - S^6)A_{116} + (-C^3S + 2C^3S^3)A_{122} \\
&+ (6C^4S^2 - 6C^2S^4)A_{126} + (-8C^3S^3 + 4CS^5)A_{166} \\
&+ (C^5S)A_{222} + (C^6 - 5C^4S^2)A_{226} + (-4C^5S + 8C^3S^3)A_{266} \\
&+ (4C^4S^2 - 4C^2S^4)A_{666} \\
B_{246} &= + (-C^2S^3)A_{114} + (CS^4)A_{115} + (-C^4S + C^2S^3)A_{124} \\
&+ (C^3S^2 - CS^4)A_{125} + (3C^3S^2 - CS^4)A_{146} \\
&+ (-3C^2S^3 + S^5)A_{156} + (C^4S)A_{224} + (-C^3S^2)A_{225} \\
&+ (C^5 - 3C^3S^2)A_{246} + (-C^4S + 3C^2S^3)A_{256} \\
&+ (-2C^4S + 2C^2S^3)A_{466} + (2C^3S^2 - 2CS^4)A_{566} \\
B_{236} &= + (-CS^3)A_{113} + (-C^3S + CS^3)A_{123} \\
&+ (3C^2S^2 - S^4)A_{136} + (C^3S)A_{223} + (C^4 - 3C^2S^2)A_{236} \\
&+ (-2C^3S + 2CS^3)A_{366} \\
B_{446} &= + (-C^3S)A_{144} + (2C^2S^2)A_{145} \\
&+ (-CS^3)A_{155} + (C^3S)A_{244} + (-2C^2S^2)A_{245} \\
&+ (CS^3)A_{255} + (C^4 - C^2S^2)A_{446} + (-2C^3S + 2CS^3)A_{456} \\
&+ (C^2S^2 - S^4)A_{556} \\
B_{346} &= + (-C^2S)A_{134} + (CS^2)A_{135} + (C^2S)A_{234} \\
&+ (-CS^2)A_{235} + (C^3 - CS^2)A_{346} + (-C^2S + S^3)A_{356} \\
B_{336} &= + (-CS)A_{133} + (CS)A_{233} + (C^2 - S^2)A_{336} \\
B_{555} &= + (S^3)A_{444} + (3CS^2)A_{445} + (3C^2S)A_{456} \\
&+ (C^3)A_{555}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{255} &= + (S^4)A_{144} + (2CS^3)A_{146} + (C^2S^2)A_{155} \\
&+ (C^2S^2)A_{244} + (2C^3S)A_{245} + (C^4)A_{255} \\
&+ (-2CS^3)A_{446} + (-4C^2S^2)A_{456} + (-2C^3S)A_{556} \\
B_{455} &= + (CS^2)A_{444} + (2C^2S - S^3)A_{445} \\
&+ (C^3 - 2CS^2)A_{456} + (-C^2S)A_{555} \\
B_{355} &= + (S^2)A_{344} + (2CS)A_{345} + (C^2)A_{355} \\
B_{225} &= + (S^5)A_{114} + (CS^4)A_{115} + (2C^2S^3)A_{124} \\
&+ (2C^3S^2)A_{125} + (-4CS^4)A_{146} + (-4C^2S^3)A_{156} \\
&+ (C^4S)A_{224} + (C^5)A_{225} + (-4C^3S^2)A_{246} \\
&+ (-4C^4S)A_{256} + (4C^2S^3)A_{466} + (4C^3S^2)A_{566} \\
B_{245} &= + (CS^3)A_{144} + (C^2S^2 - S^4)A_{145} \\
&+ (-CS^3)A_{155} + (C^3S)A_{244} + (C^4 - C^2S^2)A_{245} \\
&+ (-C^3S)A_{255} + (-2C^2S^2)A_{446} + (-2C^3S + 2CS^3)A_{456} \\
&+ (2C^2S^2)A_{556} \\
B_{235} &= + (S^3)A_{134} + (CS^2)A_{135} + (C^2S)A_{234} \\
&+ (C^3)A_{235} + (-2CS^2)A_{346} + (-2C^2S)A_{356} \\
B_{445} &= + (C^2S)A_{444} + (C^3 - 2CS^2)A_{445} \\
&+ (-2C^2S + S^3)A_{456} + (CS^2)A_{555} \\
B_{345} &= + (CS)A_{344} + (C^2 - S^2)A_{345} + (-CS)A_{355} \\
B_{335} &= + (S)A_{334} + (C)A_{335} \\
B_{222} &= + (S^6)A_{111} + (3C^2S^4)A_{112} + (-6CS^5)A_{116} \\
&+ (3C^4S^2)A_{122} + (-12C^3S^3)A_{126} + (12C^2S^4)A_{166} \\
&+ (C^6)A_{222} + (-6C^5S)A_{226} + (12C^4S^2)A_{266} \\
&+ (-8C^3S^3)A_{666} \\
B_{224} &= + (CS^4)A_{114} + (-S^5)A_{115} + (2C^3S^2)A_{124} \\
&+ (-2C^2S^3)A_{125} + (-4C^2S^3)A_{146} + (4CS^4)A_{156} \\
&+ (C^5)A_{224} + (-C^4S)A_{225} + (-4C^4S)A_{246} \\
&+ (4C^3S^2)A_{256} + (4C^3S^2)A_{466} + (-4C^2S^3)A_{566} \\
B_{223} &= + (S^4)A_{113} + (2C^2S^2)A_{123} + (-4CS^3)A_{136} \\
&+ (C^4)A_{223} + (-4C^3S)A_{236} + (4C^2S^2)A_{366} \\
B_{244} &= + (C^2S^2)A_{144} + (-2CS^3)A_{145} \\
&+ (S^4)A_{155} + (C^4)A_{244} + (-2C^3S)A_{245} \\
&+ (C^2S^2)A_{255} + (-2C^3S)A_{446} + (4C^2S^2)A_{456} \\
&+ (-2CS^3)A_{556} \\
B_{234} &= + (CS^2)A_{134} + (-S^3)A_{135} + (C^3)A_{234} \\
&+ (-C^2S)A_{235} + (-2C^2S)A_{346} + (2CS^2)A_{356} \\
B_{233} &= + (S^2)A_{133} + (C^2)A_{233} + (-2CS)A_{336} \\
B_{444} &= + (C^3)A_{444} + (-3C^2S)A_{445} + (3CS^2)A_{455} \\
&+ (-S^3)A_{555} \\
B_{344} &= + (C^2)A_{344} + (-2CS)A_{345} + (S^2)A_{355} \\
B_{334} &= + (C)A_{334} + (-S)A_{335} \\
B_{333} &= + A_{333}
\end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

ANDERSON, 1959

J.H. ANDERSON, J.A. WEIL : "Paramagnetic resonance of color centers in germanium-doped quartz".
Journal of Chemical Physics, Vol. 31, n° 2, pp. 427-434, (1959).

ANGOT, 1972

A. ANGOT : "Compléments de mathématiques".
6e édition, Masson, (1972, 1ère édition : 1949).

AOKI, 1978

T. AOKI, K. WADA : "Optical and anelastic absorptions and resonator frequency of electron-irradiated quartz".
Japanese Journal of Applied Physics, Vol. 17, n° 6, pp. 1015-1022, (1978).

ARNOLD, 1960

G.W. ARNOLD : "Defects in natural and synthetic quartz".
Journal of Physical Chemistry of Solids, Vol. 13, pp. 306-320, (1960).

AYENSU, 1977

A. AYENSU, K.H.G. ASHBEE : "The creep of quartz crystals, with special reference to the mechanism by which water accomodates dislocation glide".
Philosophical Magazine, Vol. 36, n° 3, pp. 713-723, (1977).

BALLMAN, 1964

A.A. BALLMAN, D.W. RUDD : "The growth of cultured quartz from solutions containing chemical additives".
Proceedings of the 18th Annual Symposium on Frequency Control, pp. 121-128, (1964).

BAMBAUER, 1961

H.U. BAMBAUER : "Spurenelemente und gamma-Farbzentren in Quarzen aus Zerrklüften der Schweizer Alpen".
Schweizerische Mineralogische und Petrographische Mitteilungen, Vol. 41, pp. 335-365, (1961).

BARDET, 1977

J.-P. BARDET, G. ORMANCEY, G. GODEFROY : "Simulation numérique unidimensionnelle de la dynamique d'injection de porteurs dans les diélectriques. Application au rutile".
Journal de Physique, Vol. 38, n° 3, pp. 345-352, (1977).

BARDET, 1978

J.-P. BARDET : "Etude théorique des dynamiques d'injection dans les diélectriques. Application au rutile".
Thèse d'Etat, Faculté des Sciences de Dijon, (1978).

BASS, 1968

J. BASS : "Cours de mathématiques".
4ème édition, Vol. 1, Masson, (1968, 1ère édition : 1957).

BATRAK, 1958

E.N. BATRAK : (1) "An investigation of centers of capture of irradiated quartz crystals with inserted Na ions" ; (2) "A model for the color and luminescence centers in quartz" ; (3) "Thermal emission and decoloration in X-irradiated quartz".

Soviet Physics : Crystallography, Vol. 3, (1) : pp. 102-104, (2) : pp. 633-634, (3) : pp. 635-636, (1958).

BECHMANN, 1958

R. BECHMANN : "Elastic and piezoelectric constants of alpha-quartz".

Physical Review, Vol. 110, pp. 1060-1061, (1958).

BECHMANN, 1962

R. BECHMANN, A.D. BALLATO, T.J. LUKASZEK : "Higher order temperature coefficients of the elastic stiffnesses and compliances of alpha-quartz".

Proceedings of the IRE, Vol 50, p. 1812, (1962).

BELSER, 1963

R.B. BELSER, W.H. HICKLIN : "Aging characteristics of quartz resonator with comments on the effects of radiation".
Proceedings of the 17th Annual Symposium on Frequency Control, pp. 127-175, (1963).

BERG, 1969

C.A. BERG, J.R. ERICKSON : "Effects of gamma irradiation on frequency stability of 5th overtone crystal oscillators".
Proceedings of the 23rd Annual Symposium on Frequency Control, pp. 178-186, (1969).

BESSON, 1972

R. BESSON, J.-J. GAGNEPAIN : "Détermination des coefficients non linéaires de polarisation électrique du quartz".
Comptes Rendus à l'Académie des Sciences, Vol. B.274, pp. 835-838, (1972).

BIRSS, 1963

R.R. BIRSS : "Macroscopic symmetry in space time".
Reports on Progress in Physics, Vol. 26, pp. 311-331, (1963).

BÖMMEL, 1955

H.E. BÖMMEL, W.P. MASON, A.W. WARNER : "Experimental evidence for dislocations in crystalline quartz".
Physical Review, Vol. 99, n° 6, pp. 1894-1896, (1955).

BÖMMEL, 1956

H.E. BÖMMEL, W.P. MASON, A.W. WARNER : "Dislocations, relaxations, and anelasticity of crystal quartz".
Physical Review, Vol. 102, n° 1, pp. 64-71, (1956).

BÖMMEL, 1960

H.E. BÖMMEL, K. DRANSFELD : "Excitation and attenuation of hypersonic waves in quartz".
Physical Review, Vol. 117, n° 5, pp. 1245-1252, (1960).

BRENDEL, 1979

R. BRENDEL : "Independent fourth order elastic coefficients for all crystal classes".
Acta Crystallographica, Vol. A-35, pp. 525-533, (1979).

BRENDEL, 1983

R. BRENDEL : "Material nonlinear piezoelectric coefficients for quartz".
Journal of Applied Physics, Vol. 54, n° 9, pp. 5339-5346, (1983).

BRICE, 1978

J.C. BRICE, A.M. COLE : "The characterization of synthetic quartz by using infrared absorption".
Proceedings of the 32nd Annual Symposium on Frequency Control, pp. 1-10, (1978).

BROWN, 1952

C.S. BROWN, L.A. THOMAS : "Response of synthetic quartz to X-ray irradiation".
Nature, Vol. 169, n° 4288, pp. 35-36, (1952).

BROWN, 1960

C.S. BROWN, L.A. THOMAS : "The effect of impurities on the growth of synthetic quartz".
Journal of Physical Chemistry of Solids, Vol. 13, pp. 337-343, (1960).

BROWN, 1975

R.N. BROWN, A. KAHAN : "Optical absorption of irradiated quartz in the near I.R.".
Journal of Physical Chemistry of Solids, Vol. 36, pp. 467-476, (1975).

BRUGGER, 1965

K. BRUGGER : "Pure modes for elastic waves in crystals".
Journal of Applied Physics, Vol. 36, n° 3, pp. 759-773, (1965).

CADY, 1946

W.G. CADY : "Piezoelectricity".
Vol. 1, Dover, (1964, 1ère édition : McGraw-Hill, 1946).

CAPONE, 1970

B.R. CAPONE, A. CAHAN, R.N. BROWN, J.R. BUCKMELTER : "Quartz crystal radiation effects".
IEEE Transactions on Nuclear Science, Vol. NS-17,
pp. 217-221, (1970).

CHI, 1957

A.R. CHI : "Effects of X-ray irradiation on the frequency-temperature behavior of AT-cut quartz resonators".
Physical Review, Vol. 107, n° 6, pp. 1524-1529, (1957).

CHIZHIKOV, 1982

S.I. CHIZHIKOV, N.G. SOROKIN, V.S. PETRAKOV : "The elastoelectric effect in the non-centrosymmetric crystals".
Ferroelectrics, Vol. 41, part II, pp. 9-25, (1982).

COELHO, 1966

R. COELHO : "Considérations théoriques sur le contact métal-diélectrique".
Revue Générale de l'Electricité, Vol. 75, n° 6, pp. 759-768, (1966).

COHEN, 1956

A.J. COHEN : "Anisotropic color centers in alpha-quartz. Part I. Smoky quartz".
Journal of Chemical Physics, Vol. 25, n° 5, pp. 908-914, (1956).

COHEN, 1958

A.J. COHEN, H.L. SMITH : "Anisotropic color centers in alpha-quartz. II. Germanium-doped synthetic quartz".
Journal of Chemical Physics, Vol. 28, n° 3, pp. 401-405, (1958).

COHEN, 1960

A.J. COHEN : Substitutional and interstitial aluminum impurity in quartz, structure and color center interrelationships".
Journal of Physical Chemistry of Solids, Vol. 13, pp. 321-325, (1960).

COHEN, 1968

A.J. COHEN, E.S. HODGE : "Zonal specificity and nonspecificity of certain impurities during growth of synthetic alpha-quartz".
Physics and Chemistry of Solids, Vol. 7, pp. 361-363, (1968).

CONTE, 1970

R.R. CONTE : "Eléments de cryogénie".
Masson, (1970).

COOK, 1953

R.K. COOK, R.G. BRECKENRIDGE : "Anelasticity of quartz".
Physical Review, Vol. 92, n° 6, pp. 1419-1423, (1953).

CURIE, 1886

J. CURIE : "Sur le pouvoir inducteur spécifique et la conductibilité des diélectriques. Relation entre la conductibilité et le pouvoir absorbant".
Comptes Rendus à l'Académie des Sciences, Vol. 103, pp. 928-931, (1886).

CURIE, 1889

J. CURIE : "Recherches sur la conductibilité des corps cristallisés".
Annales de Chimie et de Physique, Vol. 18, pp. 203-269, (1889).

DANIEL, 1967

V.V. DANIEL : "Dielectric relaxation".
Academic Press, (1967).

DE VOS, 1967

W.J. DE VOS, J. VOLGER : "A new investigation of dielectric relaxation processes in smoky quartz crystals".
Physica, Vol. 34, pp. 272-284, (1967).

DE VOS, 1970

W.J. DE VOS, J. VOLGER : "Dielectric relaxation phenomena in smoky quartz".
Physica, Vol. 47, pp. 13-37, (1970).

DE VOS, 1971

W.J. DE VOS, J. VOLGER : "A modified Fuoss-Kirkwood approach for asymmetrical dielectric loss curves".
Transaction of the Faraday Society, Vol. 67, pp. 1626-1629, (1971).

DEFORD, 1975

J.W. DEFORD, O.W. JOHNSON : "Anomalous diffusion in nonmetals (origin and effects of internal electric fields)".
Journal of Applied Physics, Vol. 46, n° 3, pp. 1013-1022, (1975).

DENNEN, 1966

W.H. DENNEN : "Stoichiometric substitution in natural quartz".
Geochimica et Cosmochimica Acta, Vol. 30, pp. 1235-1241, (1966).

DIEULESAINT, 1974

S. DIEULESAINT, D. ROYER : "Ondes élastiques dans les solides".
Masson, (1974).

DODD, 1965

D.M. DODD, D.B. FRASER : "The 3000-3400 cm^{-1} absorption bands and anelasticity in crystalline alpha-quartz".
Journal of Physical Chemistry of Solids, Vol. 26, pp. 673-686, (1965).

DOHERTY, 1980

S.P. DOHERTY, J.J. MARTIN, A.F. ARMINGTON, R.N. BROWN : "The effects of irradiation and electrodiffusion on the sodium acoustic loss peak in synthetic quartz".
Journal of Applied Physics, Vol. 51, n° 8, pp. 4164-4168, (1980).

DOHERTY, 1982

S.P. DOHERTY, S.E. MORRIS, D.C. ANDREWS, D.F. CROXALL :
"Radiation effects in synthetic and high purity synthetic quartz : some recent infrared, electron spin resonance and acoustic loss results".
Proceedings of the 36th Annual Symposium on Frequency Control, pp. 66-76, (1982).

EULER, 1978

F. EULER, F. LIGOR, A. KAHAN, F. FELLIGRINI, T.M. FLANAGAN, T.F. WROBEL : "Steady state radiation effects in precision quartz resonators".
Proceedings of the 32nd Annual Symposium on Frequency Control, pp. 24-33, (1978).

EULER, 1980

F. EULER, H.G. LIPSON, P.A. LIGOR : "Radiation effects in quartz oscillators, resonators and materials".
Proceedings of 34th Annual Symposium on Frequency Control, pp. 72-80, (1980).

FEIGL, 1974

F.L. FEIGL, W.B. FOWLES, K.L. YIP : "Oxygen vacancy model for the E' center in SiO_2 ".
Solid State Communication, Vol. 14, n° 3, pp. 225-229, (1974).

FLANAGAN, 1969

T.M. FLANAGAN, T.F. WROBEL : "Radiation effects in swept-synthetic quartz".
IEEE Transactions on Nuclear Science, Vol. NS-16, pp. 130-137, (1969).

FLANAGAN, 1974

T.M. FLANAGAN : "Hardness assurance in quartz crystal resonators".
IEEE Transactions on Nuclear Science, Vol. NS-21, pp. 300-302, (1974).

FRASER, 1964

D.B. FRASER : "Anelastic effects of alkali ions in crystalline quartz".
Journal of Applied Physics, Vol. 35, n° 10, pp. 2913-2918, (1964).

FRASER, 1966

D.B. FRASER, D.M. DODD, D.W. RUDD, W.J. CARROLL : "Using infrared to find the mechanical Q of alpha-quartz".
Frequency, Vol. 4, pp. 18-21, (1966).

FRASER, 1968

D.B. FRASER : "Impurities and anelasticity in crystalline quartz".
Physical Acoustics, Vol. V, (MASON), Academic Press, (1968).

FRISCHAT, 1969

G.H. FRISCHAT : "Tracer diffusion of sodium in the c-axis direction of quartz".
Physica Status Solidi, Vol. 35, pp. K47-K49, (1969).

FRISCHAT, 1970

G.H. FRISCHAT : "Kationentransport in Quarzkristallen".
Berichte der Deutsch-Keramischen Gesellschaft, Vol. 47, n° 4 : pp. 238-243, n° 5 : pp. 313-316, n° 6 : pp. 364-368, n° 10 : pp. 635-637, (1970).

FRISCHAT, 1971

G.H. FRISCHAT : "Tracer diffusion in glasigem und kristallen SiO₂".
Glas-Email-Keramo-Technik, Vol. 22, n° 8, pp. 275-280, (1971).

FRISCHAT, 1972

G.H. FRISCHAT : "La diffusion de traces dans les substances céramiques".
Bulletin de la Société Française de Céramique, Vol. 96, pp. 61-67, (1972).

FRONDEL, 1945

C. FRONDEL : "Effects of radiation on the elasticity of quartz".
American Mineralogist, Vol. 30, n°1,2, p. 432, (1945).

FRONDEL, 1962

C. FRONDEL : "Silica minerals".
The System of Mineralogy, Vol. III, (DANA), 7e édition, Wiley (1962, 1ère édition : 1892).

GAGNEFAIN, 1972

J.-J. GAGNEFAIN : "Mécanismes non linéaires dans les résonateurs à quartz : théorie, expériences et applications métrologiques".

Thèse de Doctorat ès Sciences, Université de Besançon, (1972).

GAGNEFAIN, 1975

J.-J. GAGNEFAIN, R. BESSON : "Nonlinear effects in piezoelectric quartz crystals".

Physical Acoustics, Vol. XI, (MASON, THURSTON), Academic Press, (1975).

GAGNEFAIN, 1981

J.-J. GAGNEFAIN, D. HAUDEN : "Low temperature quartz crystal oscillator. Fast warm-up SAW oscillator".

Rapport final du contrat Air Force AFOSR-80-0105, Rome Air Development Center, (1981).

GIBSON, 1950

G. GIBSON, R.C. VOGEL : "Migration of lithium and several multicharged ions through quartz plates in an electric field. II".

Journal of Chemical Physics, Vol. 18, n° 8, pp. 1094-1097, (1950).

GRIFFITHS, 1954

J.H.E. GRIFFITHS, J. OWEN, I.M. WARD : "Paramagnetic resonance in neutron-irradiated diamond and smoky quartz". Nature, Vol. 173, n° 4401, pp. 439-440, (1954).

GRIFFITHS, 1955

J.H.E. GRIFFITHS, J. OWEN, I.M. WARD : "Magnetic resonance in irradiated diamond and quartz".

Report of the Bristol Conference on Defects in Crystalline Solids, pp. 81-87, The Physical Society, (1955).

GRISCOM, 1979

D.L. GRISCOM : "Point defects and radiation damage in alpha-quartz".

Proceedings of the 33rd Annual Symposium on Frequency Control, pp. 98-109, (1979).

GROSLAMBEST, 1975

J. GROSLAMBEST, G. MARIANNEAU, M. OLIVIER : "Méthodes expérimentales de caractérisation des oscillateurs. Etude comparative".

L'Onde Electrique, Vol. 55, n° 2, pp. 74-81, (1975).

HALLIBURTON, 1973

L.E. HALLIBURTON, E.D. FERLSON, R.A. WEEKS, J.A. WEIL, M.C. WINTERSHILL : "ESR study of E'_2 centers in alpha-quartz".

Solid State Communication, Vol. 30, n° 9, pp. 575-579, (1973).

HALLIBURTON, 1980

L.E. HALLIBURTON, M.E. MARKES, J.J. MARTIN : "Point defects in synthetic quartz : a survey of spectroscopic results with application to quality assurance".
Proceedings of the 34th Annual Symposium on Frequency Control, pp. 1-8, (1980).

HALLIBURTON, 1981

L.E. HALLIBURTON, N. KOUMVAKALIS, M.E. MARKES, J.J. MARTIN : "Radiation effects in crystalline SiO_2 : the role of Aluminum".
Journal of Applied Physics, Vol. 52, n° 5, pp. 3565-3574, (1981).

HARRIS, 1937

P.M. HARRIS, C.E. WARING : "Diffusion of lithium ions through quartz in an electric field".
Journal of Physical Chemistry, Vol. 41, pp. 1077-1085, (1937).

HARTMAN, 1973

E.F. HARTMAN, J.C. KING : "Calculation of transient thermal imbalance within crystal units following exposure to pulse irradiation".
Proceedings of the 27th Annual Symposium on Frequency Control, pp. 124-127, (1973).

HAUDEN, 1978

D. HAUDEN, M. MICHEL, J.-J. GAGNEPAIN : "Higher order temperature coefficients of quartz SAW oscillators".
Proceedings of the 32nd Annual Symposium on Frequency Control, pp. 77-86, (1978).

HAUDEN, 1981

D. HAUDEN, M. PLANAT, J.-J. GAGNEPAIN : "Nonlinear properties of surface acoustic waves : application to oscillators and sensors".
IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics, Vol. SU-28, n° 5, pp. 342-348, (1981).

HAVEN, 1966

H. HAVEN, A. KATS, J.S. WIERINGEN : "Optical absorption and paramagnetic resonance of colour centres in X-rayed alpha-quartz containing germanium".
Philips Research Reports, Vol. 21, pp. 446-476, (1966).

HRUSKA, 1961

K. HRUSKA : "The influence of an electric field on the frequency of piezoelectric cuts".
Czechoslovak Journal of Physic, Vol. B11, pp. 150-152, (1961).

HRUSKA, 1962

K. HRUSKA : "An attempt at a phenomenological interpretation of the influence of a polarizing field on piezoelectric resonators".
Czechoslovak Journal of Physic, Vol. B12, pp. 338-353, (1962).

HRUSKA, 1971a

K. HRUSKA : "Polarizing effect with piezoelectric plates and second order effects".
IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics, Vol. SU-18, n° 1, pp. 1-7, (1971).

HRUSKA, 1971b

K. HRUSKA, A. KHOGALI : "Polarizing effect with alpha-quartz rods and the electroelastic tensor".
IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics, Vol. SU-18, n° 3, pp. 171-176, (1971).

HRUSKA, 1977

K. HRUSKA : "The electroelastic tensor and other second order phenomena in quasilinear interpretation of the polarizing effect with thickness vibrations of alpha-quartz plates".
Proceedings of the 31st Annual Symposium on Frequency Control, pp. 159-170, (1977).

HRUSKA, 1978a

K. HRUSKA : "Second order phenomena in alpha-quartz and the polarizing effect with plates of orientation $(xz)_\psi$ ".
IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics, Vol. SU-25, n° 4, pp. 198-203, (1978).

HRUSKA, 1978b

K. HRUSKA : "Polarizing effect with doubly rotated alpha-quartz plates vibrating in thickness".
IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics, Vol. SU-25, n° 6, pp. 390-392, (1978).

HUGHES, 1973

R.C. HUGHES : "Transient X-ray induced conductivity in single crystal and fused quartz".
Proceedings of the 27th Annual Symposium on Frequency Control, pp. 128-135, (1973).

HUGHES, 1975

R.C. HUGHES : "Electronic and ionic charge carriers in irradiated single crystal and fused quartz".
Radiation Effects, Vol. 26, pp. 225-235, (1975).

IEEE, 1978

IEEE Standard 176 : "IEEE Standard on piezoelectricity".
Institute of Electrical and Electronic Engineers, pp. 1-55, (1978).

IRE, 1949

IEEE Standard 176 : "Standards on piezoelectric crystals, 1949".
Proceedings of the IRE, Vol. 37, pp. 1378-1395, (1949).

ISOYA, 1978

J. ISOYA, J.A. WEIL, R.F.C. CLARIDGE : "The dynamic interchange and relationship between germanium centers in alpha-quartz".
Journal of Chemical Physics, Vol. 69, n° 11, pp. 4876-4884, (1978).

JAIN, 1982

H. JAIN, A.S. NOWICK : "Radiation-induced conductivity in quartz crystals".
Journal of Applied Physics, Vol. 53, n° 1, pp. 485-489, (1982).

JEFFREYS, 1961

H. JEFFREYS : "Cartesian tensors".
Cambridge University Press, (1961, 1ère édition : 1931).

KATS, 1962

A. KATS : "Hydrogen in alpha-quartz".
Philips Research Reports, Vol. 17, pp. 133-195, (1962).

KING, 1958

J.C. KING : "Anelasticity of synthetic crystalline quartz at low temperature".
Physical Review, Vol. 109, n° 5, pp. 1552-1553, (1958).

KING, 1959

J.C. KING : "The anelasticity of natural and synthetic quartz at low temperatures".
Bell System Technical Journal, Vol. 38, n° 2, pp. 573-602, (1959).

KING, 1972

J.C. KING, H.H. SANDER : "Rapid annealing of frequency change in crystal resonators following pulsed X-irradiation".
IEEE Transactions on Nuclear Science, Vol. NS-19, pp. 23-32, (1972).

KING, 1973

J.C. KING, H.H. SANDER : "Transient change in Q and frequency of AT-cut quartz resonators following exposure to pulse X-rays".
IEEE Transactions on Nuclear Science, Vol. NS-20, pp. 117-125, (1973).

KING, 1975

J.C. KING, H.H. SANDER : "Transient changes in quartz resonators following exposure to pulse ionization".
Radiation Effects, Vol. 26, pp. 203-212, (1975).

KITTEL, 1976

C. KITTEL : "Introduction to solid state physics".
5e édition, Wiley and Sons, (1976, 1ère édition : 1953).

KOEHLER, 1979

D.R. KOEHLER : "Radiation-induced frequency transients in AT, BT and SC cut quartz resonators".
Proceedings of the 33rd Annual Symposium on Frequency Control, pp. 118-121, (1979).

KREFFT, 1975

G.B. KREFFT : "Effects of high-temperature electrolysis on the coloration characteristics and OH-absorption bands in alpha-quartz".
Radiation Effects, Vol. 26, pp. 249-259, (1975).

KUSTERS, 1970

J.A. KUSTERS : "The effect of static electric fields on the elastic constants of alpha-quartz".
Proceedings of the 24th Annual Symposium on Frequency Control, pp. 46-54, (1970).

LANDOLT, 1979

R.F.S. HEARMON, W.R. COOK, H. JAFFE : "Numerical data and functional relationships in science and technology".
LANDOLT-BORNSTEIN, Vol. III/11, Springer-Verlag, (1979).

LAUDISE, 1965

R.A. LAUDISE, A.A. BALLMAN, J.C. KING : "Impurity content of synthetic quartz and its effect upon mechanical Q".
Journal of Physical Chemistry of Solids, Vol. 26, pp. 1305-1308, (1965).

LIPSON, 1978

H.G. LIPSON, F. EULER, A.F. ARMINGTON : "Low temperature infrared absorption of impurities in high grade quartz".
Proceedings of the 32nd Annual Symposium on Frequency Control, pp. 11-23, (1978).

LIPSON, 1979

H.G. LIPSON, F. EULER, P.A. LIGOR : "Radiation effects in swept premium-Q quartz material, resonators and oscillators".
Proceedings of the 33rd Annual Symposium on Frequency Control, pp. 122-133, (1979).

LIPSON, 1981

H.G. LIPSON, A. KAHAN, R.N. BROWN, F.K. EULER : "High temperature resonance loss and infrared characterization of quartz".
Proceedings of the 35th Annual Symposium on Frequency Control, pp. 329-334, (1981).

MACKEY, 1963

J.H. MACKEY : "EPR study of impurity-related color centres in germanium doped quartz".
Journal of Chemical Physics, Vol. 39, n° 1, pp. 74-83, (1963).

MACKEY, 1970

J.H. MACKEY, J.W. BOSS, D.E. WOOD : "EPR study of substitutional-aluminum-related hole centers in synthetic alpha-quartz".
Journal of Magnetic Resonance, Vol. 3, pp. 44-54, (1970).

MARTIN, 1981

J.J. MARTIN, L.E. HALLIBURTON, R.B. BOSSOLI : "Point defects in cultured quartz : recent acoustic loss, infrared, and magnetic resonance results".
Proceedings of the 35th Annual Symposium on Frequency Control, pp. 317-320, (1981).

MARTIN, 1980

J.J. MARTIN, S.P. DOHERTY : "The acoustic loss spectrum of 5 MHz 5th overtone AT-cut deuterated quartz resonators".
Proceedings of the 34th Annual Symposium on Frequency Control, pp. 81-84, (1980).

MARTIN, 1982

J.J. MARTIN, L.E. HALLIBURTON, R.B. BOSSOLI : "The influence of crystal growth rate and electrodiffusion (sweeping) on point defects in alpha-quartz".
Proceedings of the 36th Annual Symposium on Frequency Control, pp. 77-81, (1982).

MATTERN, 1973

P.L. MATTERN, K. LENGWEILER, P.W. LEVY : "Effect of ^{60}Co gamma ray irradiation on the optical properties of natural and synthetic quartz from 85 to 300K".
Proceedings of the 27th Annual Symposium on Frequency Control, pp. 139-152, (1973).

MEDLIN, 1963

W.L. MEDLIN : "Thermoluminescence in quartz".
Journal of Chemical Physics, Vol. 38, n° 5, pp. 1132-1143, (1963).

MILNE, 1964

E.L. MILNE, P. GIBBS : "Ag ion migration in alpha-quartz".
Journal of Applied Physics, Vol. 35, n° 8, pp. 2364-2367, (1964).

MITCHELL, 1955

E.W.J. MITCHELL, E.G.S. PAIGE : "The anisotropic absorption of the visible bands in irradiated alpha-quartz".
Philosophical Magazine, Vol. 46, pp. 1353-1361, (1955).

MITCHELL, 1956

E.W.J. MITCHELL, E.G.S. PAIGE : "The optical effects of radiation induced atomic damage in quartz".
Philosophical Magazine, Vol. 1, pp. 1085-1115, (1956).

MITCHELL, 1957

E.W.J. MITCHELL, J.D. RIGDEN : "The effects of radiation on the near infrared absorption spectrum of alpha-quartz".
Philosophical Magazine, Vol. 2, pp. 941-956, (1957).

MOTT, 1940

N.F. MOTT, R.W. GURNEY : "Electronic process in ionic crystals".
Oxford, (1940).

NASSAU, 1975

K. NASSAU, B.E. PRESCOTT : "A reinterpretation of smoky quartz".
Physica Status Solidi, Vol. A29, pp. 659-663, (1975).

NOWICK, 1969

A.S. NOWICK, M.W. STANLEY : "Analysis of dielectric and anelastic relaxation due to point defects in alpha-quartz".
Physics of the Solid State, Ch. 11, (BALAKRISHNA, KRISHNAMURTHY, RAO), Academic Press, (1969).

NOWICK, 1972

A.S. NOWICK, B.S. BERRY : "Anelastic relaxation in crystalline solids".
Materials Science Series, (ALPER, MARGRAVE, NOWICK), Academic Press, (1972).

NOWICK, 1980

A.S. NOWICK, H. JAIN : "Electrical conductivity and dielectric loss of quartz crystals before and after irradiation".
Proceedings of the 34th Annual Symposium on Frequency Control, pp. 9-13, (1980).

NYE, 1976

J.F. NYE : "Physical properties of crystals".
Oxford, (1976, 1ère édition : 1957).

O'BRIEN, 1955

M.C.M. O'BRIEN : "The structure of the colour centres in smoky quartz".
Proceedings of the Royal Society of London, Vol. A231, pp. 404-414, (1955).

ORMANCEY, 1978

G. ORMANCEY : "Simulation numérique des courants et des distributions de porteurs dans les diélectriques. Dynamique d'injection et de recombinaison. Etude expérimentale dans le titanate de baryum".

Thèse d'Etat, Faculté des Sciences de Dijon, (1978).

PAIGE, 1957

E.G.S. PAIGE : "The kinetics of color centre formation in quartz".

Philosophical Magazine, Vol. 2, pp. 864-876, (1957).

PARK, 1974

D.S. PARK, A.S. NOWICK : "Dielectric relaxation of point defects in alpha-quartz".

Physica Status Solidi, Vol. A26, pp. 617-626, (1974).

PASCAL, 1965

R.CALAS, P. PASCAL, J. WYART : "Silicium".

Nouveau Traité de Chimie, Vol. VIII-2 (PASCAL), pp. 38-74, Masson, (1965).

PATERSON, 1982

M.S. PATERSON : "The determination of hydroxyl by infrared absorption in quartz, silicate glasses and similar materials".

Bulletin de Minéralogie, Vol. 105, pp. 20-29, (1982).

PELLEGRINI, 1978

P. PELLEGRINI, F. EULER, A. KAHAN, T.M. FLANAGAN, T.F.

WROBEL : "Steady state and transient radiation effects in precision quartz oscillators".

IEEE Transactions on Nuclear Science, Vol. NS-25, n° 6, pp. 1267-1273, (1978).

POLL, 1966

R.A. POLL, S.L. RIDGWAY : "Effects of pulsed ionizing radiation on some selected quartz oscillator crystals".

IEEE Transactions on Nuclear Science, Vol. NS-13, n° 6, pp. 130-140, (1966).

RAMO, 1965

S. RAMO, J.R. WHINNERY, T. VAN DUZER : "Fields and waves in communication electronics".

Wiley, (1965).

REIDER, 1982

G.A. REIDER, E. KITTINGER, J. TICHY : "Electroelastic effect in alpha-quartz".

Journal of Applied Physics, Vol. 53, n° 12, pp. 8716-8721, (1982).

RINNEBERG, 1972

H. RINNEBERG, J.A. WEIL : "EPR studies of Ti^{3+} - H^+ centers in X-irradiated alpha-quartz".
Journal of Chemical Physics, Vol. 56, n° 5, pp. 2019-2028, (1972).

ROSE-INNES, 1973

A.C. ROSE-INNES : "Low temperature laboratory techniques".
2e édition, English Universities Press, (1973, 1ère édition : 1964).

RYBACH, 1967

L. RYBACH, F. LAVES : "Sodium diffusion experiments in quartz crystals".
Geochimica et Cosmochimica Acta, Vol. 31, pp. 539-546, (1967).

SAWYER, 1972

B. SAWYER : "Q capability indications from infrared absorption measurements for Na_2CO_3 process cultured quartz".
IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics, Vol. SU-19, n° 1, pp. 41-44, (1972).

SIBLEY, 1979

W.A. SIBLEY, J.J. MARTIN, M.C. WINTERSGILL, J.D. BROWN :
"The effect of radiation on the OH^- infrared absorption of quartz crystals".
Journal of Applied Physics, Vol. 50, n° 8, pp. 5449-5452, (1979).

SNOW, 1964

E.H. SNOW, P. GIBBS : "Dielectric loss due to impurity cation migration in alpha-quartz".
Journal of Applied Physics, Vol. 35, n° 8, pp. 2368-2374, (1964).

SOSIN, 1975

A. SOSIN : "The kinetics of an atom diffusing in one dimension : hydrogen in quartz".
Radiation Effects, Vol. 26, pp. 267-271, (1975).

STANLEY, 1966

J.M. STANLEY : "Radiation effects in frequency control devices".
Proceedings of the 20th Annual Symposium on Frequency Control, pp. 82-102, (1966).

STEVENS, 1962

J.M. STEVENS, J. VOLGER : "Further experimental investigations on the dielectric losses of quartz crystals in relation to their imperfections".
Philips Research Reports, Vol. 17, pp. 283-314, (1962).

STEVENS, 1963

J.M. STEVENS, J. VOLGER : "Impurity-induced imperfections and the dielectric properties of quartz crystals".
Physics and Chemistry of Glasses, Vol. 4, n° 6, pp. 247-252, (1963).

STRATTON, 1941

J.A. STRATTON : Electromagnetic theory".
Mac Graw-Hill, (1941).

THURSTON, 1964

R.N. THURSTON : "Wave propagation in fluids and normal solids".
Physical Acoustics, Vol. I.A, (MASON), Academic Press, (1964).

THURSTON, 1966

R.N. THURSTON, H.J. McSKIMIN, P. ANDREATCH : "Third order elastic coefficients of quartz".
Journal of Applied Physics, Vol. 37, n° 1, pp. 267-275, (1966).

THURSTON, 1974

R.N. THURSTON : "Waves in solids".
Handbuch der Physik, Vol. VIa/4, (FLÜGGE, TRUESDELL),
Springer Verlag, (1974).

TIERSTEN, 1969

H.F. TIERSTEN : "Linear piezoelectric plate vibrators".
Plenum Press, (1969).

TIERSTEN, 1971

H.F. TIERSTEN : "On the nonlinear equations of thermoelectroelasticity".
International Journal of Engineering Science, Vol. 9, pp. 587-604, Pergamon Press, (1971).

TIERSTEN, 1973

J.C. BAUMHAUER, H.F. TIERSTEN : "Nonlinear electroelastic equations for small fields superposed on a bias".
Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 54, n° 4, pp. 1017-1034, (1973).

TIERSTEN, 1975

H.F. TIERSTEN : "Nonlinear electroelastic equations cubic in the small field variables".
Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 57, n° 3, pp. 660-666, (1975).

TIERSTEN, 1978

H.F. TIERSTEN : "Perturbation theory for linear electroelastic equations for small fields superposed on a bias".
Journal of Acoustical Society of America, Vol. 64, n° 3, pp. 832-837, (1978).

TIERSTEN, 1979

B.K. SINHA, H.F. TIERSTEN : "First temperature derivatives of the fundamental elastic constants of quartz".
Journal of Applied Physics, Vol. 50, n° 4, pp. 2732-2739, (1979).

TOUPIN, 1956

R.A. TOUPIN : "The elastic dielectric".
Journal of Rational Mechanic Analysis, Vol. 5, n° 6, pp. 849-915, (1956).

TRUESDELL, 1960

C. TRUESDELL, R.A. TOUPIN : "The classical field theory".
Handbuch der Physik, Vol. III/1, (FLÜGGE), Springer Verlag, (1960).

VANFLEET, 1963

H.B. VANFLEET, G.S. BAKER, P. GIBBS : "Ag ion transport and deposition in alpha-quartz".
Journal of Applied Physics, Vol. 34, n° 4, pp. 891-897, (1963).

VERHOOGEN, 1952

J. VERHOOGEN : "Ionic diffusion and electrical conductivity in quartz".
American Mineralogist, Vol. 37, pp. 637-655, (1952).

VOGEL, 1950

R.C. VOGEL, G. GIBSON : "Migration of Sodium ions through quartz plates in an electric field. I".
Journal of Chemical Physics, Vol. 18, pp. 490-494, (1950).

VOLGER, 1955

J. VOLGER, J.M. STEVELS, C. Van AMERONGEN : "Dielectric losses of various monocrystals of quartz at very low temperatures".
Philips Research Reports, Vol. 10, pp. 260-280, (1955).

WEAVER, 1964

H.E. WEAVER, P. SCHINDLER : "Paramagnetische Elektronen-resonanz von Fehlstellen in Quarzkristallen".
Naturwissenschaften, Vol. 51, n° 4, pp. 81-82, (1964).

WEEKS, 1956

R.A. WEEKS : "Paramagnetic resonance of lattice defects in irradiated quartz".
Journal of Applied Physics, Vol. 27, n° 11, pp. 1376-1381, (1956).

WEEKS, 1963

R.A. WEEKS : "Paramagnetic spectra of E'_2 centers in crystalline quartz".
Physical Review, Vol. 130, n° 2, pp. 570-576, (1963).

WEEKS, 1970

R.A. WEEKS : "Paramagnetic resonance and optical absorption in gamma-ray irradiated alpha-quartz : the "Al" Center".
Journal of the American Ceramic Society, Vol. 53, pp. 176-179, (1970).

WEIL, 1973 ou 1975

J.A. WEIL : "The aluminum centers in alpha-quartz".
Proceedings of the 27th Annual Symposium on Frequency Control, pp. 153-156, (1973) ou Radiation Effects, Vol. 26, pp. 261-265, (1975).

WENDEN, 1957

H.E. WENDEN : "Ionic diffusion and the properties of quartz, I. The direct current resistivity".
American Mineralogist, Vol. 42, pp. 859-888, (1957).

WHITE, 1971

S. WHITE : "Hydroxyl ion diffusion in quartz".
Nature Physical Science, Vol. 230, p. 192, (1971).

WHITE, 1979

G.K. WHITE : "Experimental techniques in low-temperature physics".
3e édition, Clarendon Press, (1979, 1ère édition : 1959).

WOOD, 1960

D.L. WOOD : "Infrared absorption of defects in quartz".
Journal of Physical Chemistry of Solids, Vol. 13, pp. 326-336, (1960).

YIP, 1975

K.L. YIP, W.B. FOWLER : "Electronic structure of E'_1 centers in SiO_2 ".
Physical Review, Vol. B11, n° 6, pp. 2327-2338, (1975).

YOUNG, 1978

T.J. YOUNG, D.R. KOEHLER, R.A. ADAMS : "Radiation induced frequency and resistance changes in electrolyzed high purity quartz resonators".

Proceedings of the 32nd Annual Symposium on Frequency Control, pp. 34-42, (1978).

ZELENKA, 1982

J. ZELENKA : "The influence of the polarizing field on piezoelectric resonators with high electromechanical coupling".

Ferroelectrics, Vol. 41, part II, pp. 35-38, (1982).

Résumé

L'effet électroélastique, c'est-à-dire la variation de fréquence sous l'effet d'un champ électrique continu appliqué sur les électrodes d'un résonateur à quartz, est utilisé pour calculer les coefficients piézoélectriques non linéaires de ce matériau.

L'étude du régime de relaxation qui suit l'effet électroélastique permet de mettre en évidence la présence d'impuretés dans le cristal et de déterminer leur concentration.

Des informations sur la nature de ces impuretés peuvent être obtenues grâce à l'étude de l'évolution des constantes de temps de relaxation en fonction de la température.

Mots clés

Quartz - Impureté - Effet électroélastique - Diffusion ion - Piézoélectricité
Phénomène non linéaire - Oscillateur piézoélectrique - Oscillateur quartz
Résonateur piézoélectrique - Résonateur quartz - Stabilité fréquence
Tenseur - Constante piézoélectrique - Energie activation
Relaxation défaut cristallin